Straßenverkehrssimulationen

Mit den hier beschriebenen einfachen Simulationen sollen einige Problemstellungen aus dem Straßenverkehr unter physikalischen Gesichtspunkten untersucht werden:

- Bremsvorgänge
- Überholvorgänge
- Anfahren an der Ampel
- Einfluss von Fluktuationen

Bewegungsgleichungen

Bei einer eindimensionalen Bewegung gelten die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$dv = a(t)\,dt \quad \text{und} \quad ds = v(t)\,dt$$

Dabei ist t die Zeit, v die Geschwindigkeit, a die Beschleunigung und s die zurückgelegte Strecke. Zur numerischen Berechnung können diese Gleichungen als Differenzengleichungen geschrieben werden:

$$\Delta v = a(t)\,\Delta t \quad \text{und} \quad \Delta s = v(t)\,\Delta t$$

Dabei ist Δt der Zeitschritt. In der Regel entsteht durch diese Diskretisierung ein Diskretisierungsfehler, der umso kleiner ist, je kleiner der Zeitschritt ist.

Bremsvorgänge

Wir betrachten hier eindimensionale Bewegungen mit einer Anfangsgeschwindigkeit v_0 und konstanter Verzögerung a_0. Die Bewegung wird mit den folgenden Gleichungen iterativ berechnet:

$$v_n = v_{n-1} - a_0\,\Delta t \quad \text{und} \quad s_n = s_{n-1} + \tfrac{1}{2}\,(v_{n-1} + v_n)\,\Delta t$$

Dadurch, dass die mittlere Geschwindigkeit innerhalb eines Zeitschritts verwendet wird, gibt es keinen Diskretisierungsfehler. Mittels dieser iterativen Lösung der Bewegungsgleichungen untersuchen wir nun verschiedene Szenarien.

In der Fahrschule haben wir gelernt, dass der Sicherheitsabstand in Metern der Geschwindigkeit in km/h geteilt durch 2 entspricht. Bei 120 km/h wären das folglich 60 m.

Szenario 1A: Fahrschule

Drei gleiche Fahrzeuge der Länge L = 4,5 m fahren mit konstanter Geschwindigkeit v_0 = 120 km/h im Abstand d_0 = 60 m hinter einander her. Bei t = 0 s bremst das erste Fahrzeug mit der Verzögerung a_0 = 6 m/s², bis es zum Stillstand kommt. Die nachfolgenden Fahrzeuge machen das gleiche, allerdings jeweils erst nach der Reaktionszeit T_R = 1,8 s. Diese Reaktionszeit ist die Basis für die Regel „Halber Tachoabstand“.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Geschwindigkeiten v der drei Fahrzeuge in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke s. Dabei ist s = 0 m die Position des ersten Fahrzeugs bei t = 0 s.

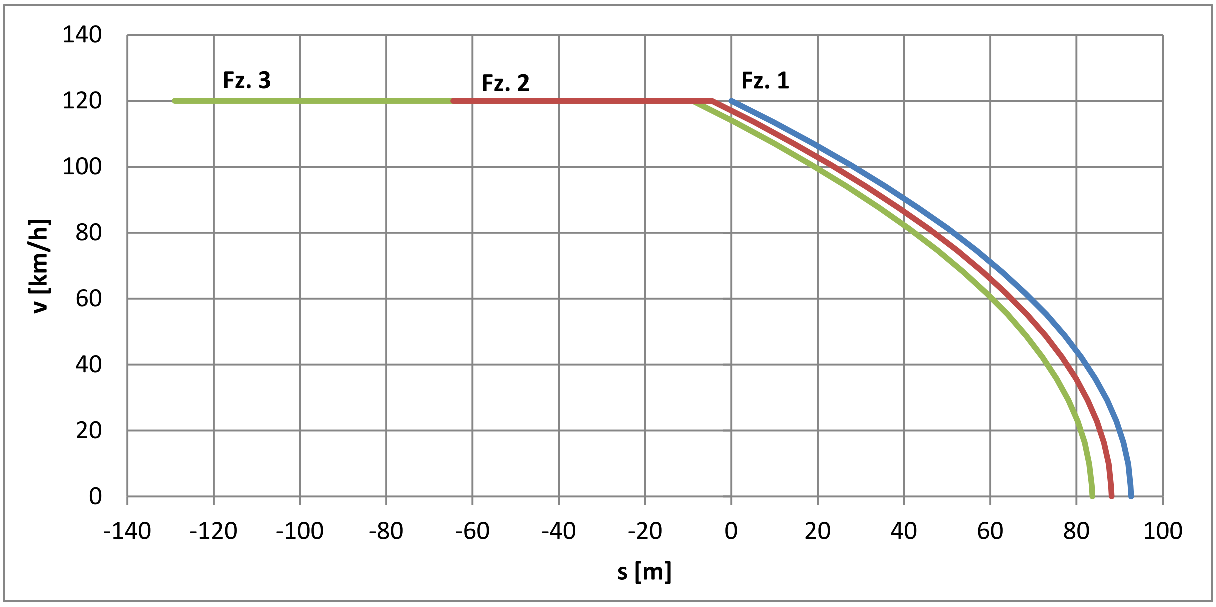

Abb. 1: Geschwindigkeiten in Szenario 1A

Man sieht, dass alle drei Fahrzeuge praktisch an der selben Stelle bremsen, lediglich immer eine Fahrzeuglänge L = 4,5 m vorher, da sie ja hintereinander zum Stehen kommen sollen und nicht nebeneinander. Die nächste Abbildung zeigt die Abstände d der Fahrzeuge in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v.

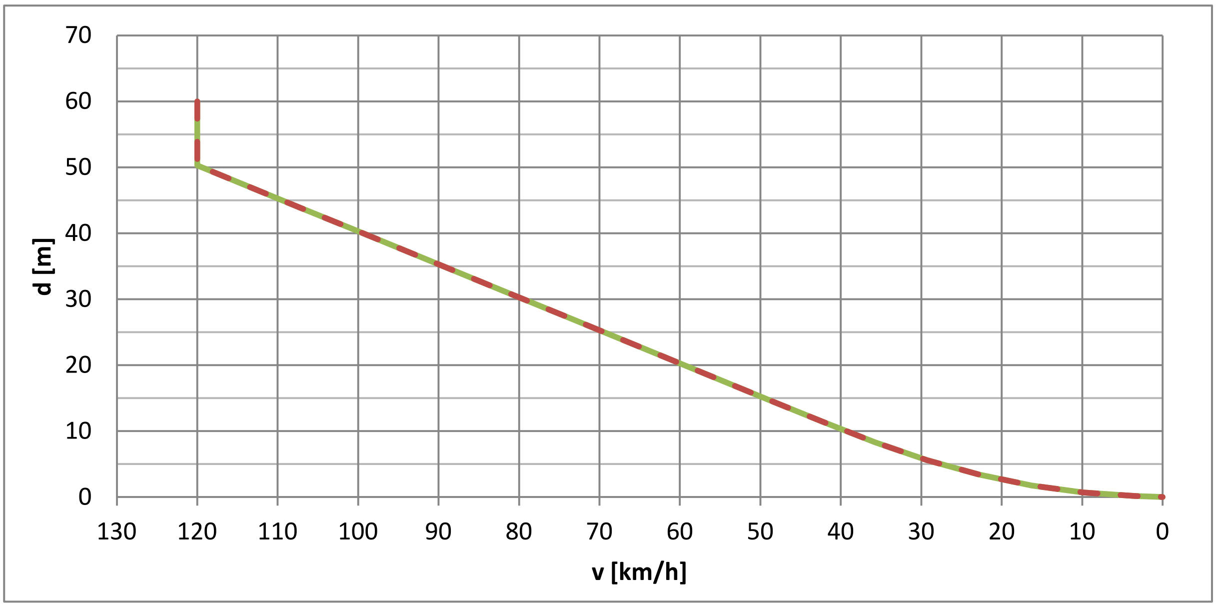

Abb. 2: Abstände in Szenario 1A

Die Abstände zwischen den Fahrzeugen sind identisch. Zuerst verringert sich der Abstand, ohne dass die Geschwindigkeit abnimmt. Das liegt an der Reaktionszeit T_R = 1,8 s. Im weiteren Verlauf gehen die Abstände auf 0 m herunter. D.h. die Fahrzeuge kommen Stoßstange an Stoßstande zum Stehen. Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Verzögerung a_0, die aber natürlich Einfluss auf die bis zum Stillstand zurückgelegte Strecke hat.

Anhalteweg und Bremsweg

Der Anhalteweg setzt sich aus dem während der Reaktionszeit T_R mit konstanter Geschwindigkeit v_0 zurückgelegten Weg $s_R = v_0 T_R$ und dem Bremsweg s_B zusammen. Für den Bremsweg gilt bei konstanter Verzögerung a_0 $v(t) = v_0 - a_0 t$ und damit ist bei $t = v_0/a_0$ $v(t) = 0$. Durch Integration der Geschwindigkeit über die Zeit ergibt sich $s_B = ½\, v_0^2/a_0$. Insgesamt ist der Anhalteweg also

$$s_A = s_R + s_B = v_0 T_R + ½\, v_0^2/a_0.$$

Mit den Parametern unseres Beispiels ergibt sich unter Umrechnung der Geschwindigkeiten in m/s – dazu muss man durch 3,6 teilen – s_R = 60 m und s_B = 92,59 m.

Verkehrsfluss

Der Verkehrsfluss, d.h. die Anzahl der Fahrzeuge, die pro Zeiteinheit einen Punkt passieren, ergibt sich aus Geschwindigkeit und Abstand zu $\Phi = v/(d+L)$.

In unserem Beispiel beträgt der Verkehrsfluss zu Beginn 31,0/min und geht dann natürlich auf 0,0/min zurück, da die Fahrzeuge zum Stillstand kommen.

Reaktionszeiten

Wenn sich ein Fahrer voll auf den Verkehr konzentriert und nicht abgelenkt wird, sollte die Reaktionszeit nicht größer als 0,6 s sein.[1] Wir rechnen deshalb im Weiteren mit T_R = 0,6 s, zumal die Bremsansprechzeit bei unseren Überlegungen nur bis zum Aufleuchten des Bremslichts relevant ist, auf das der Hinterherfahrende reagiert.

Warum auch heute noch die Regel „Halber Tachoabstand" gelehrt wird und sogar bei elektronischen Abstandsregelungssystemen zum Einsatz kommt, ist absolut nicht nachvollziehbar.

Szenario 1B: Fokussierter Fahrer

Drei gleiche Fahrzeuge der Länge L = 4,5 m fahren mit konstanter Geschwindigkeit v_0 = 120 km/h im Abstand d_0 = 20 m hinter einander her. Bei t = 0 s bremst das erste Fahrzeug mit der Verzögerung a_0 = 7,5 m/s², die nahe an einer Vollbremsung liegt,[2] bis es zum Stillstand

[1] Laut Urteil des BGH, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Reaktion_(Verkehrsgeschehen)

[2] Auf trockener Asphaltstraße werden Bremsverzögerungen > 8 m/s² erreicht, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Bremsverz%C3%B6gerung

kommt. Die nachfolgenden Fahrzeuge machen das gleiche, allerdings jeweils erst nach der Reaktionszeit T_R = 0,6 s.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Geschwindigkeiten v der drei Fahrzeuge in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke s.

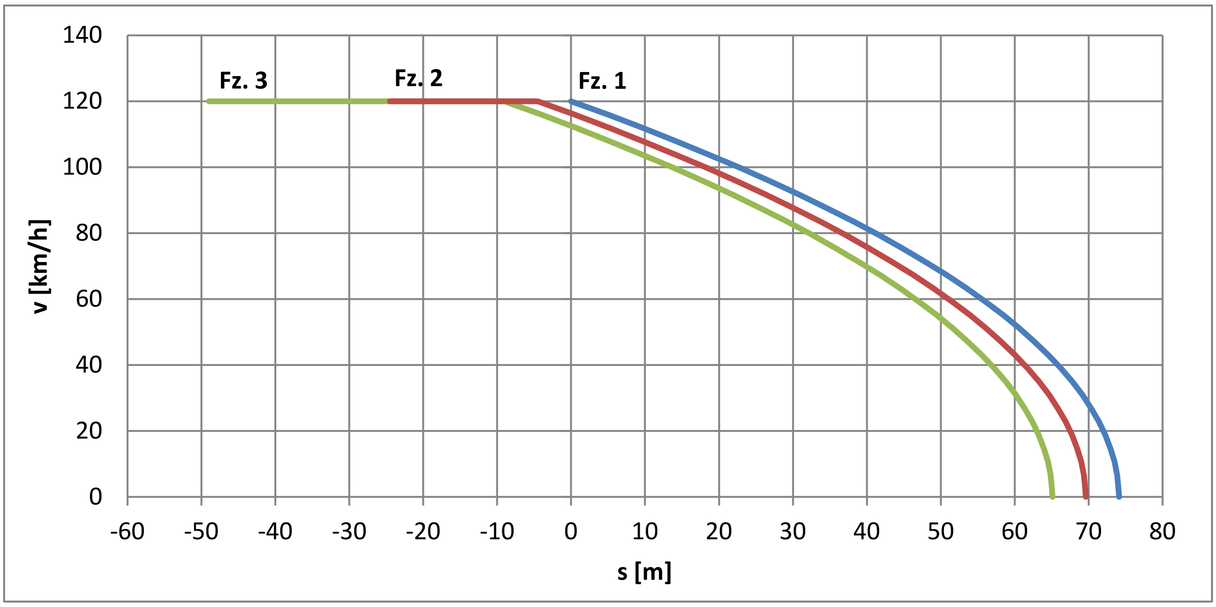

Abb. 3: Geschwindigkeiten in Szenario 1B

Auch hier sieht man, dass alle drei Fahrzeuge praktisch an der selben Stelle bremsen, lediglich immer eine Fahrzeuglänge L = 4,5 m vorher. Die nächste Abbildung zeigt die Abstände d der Fahrzeuge in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v.

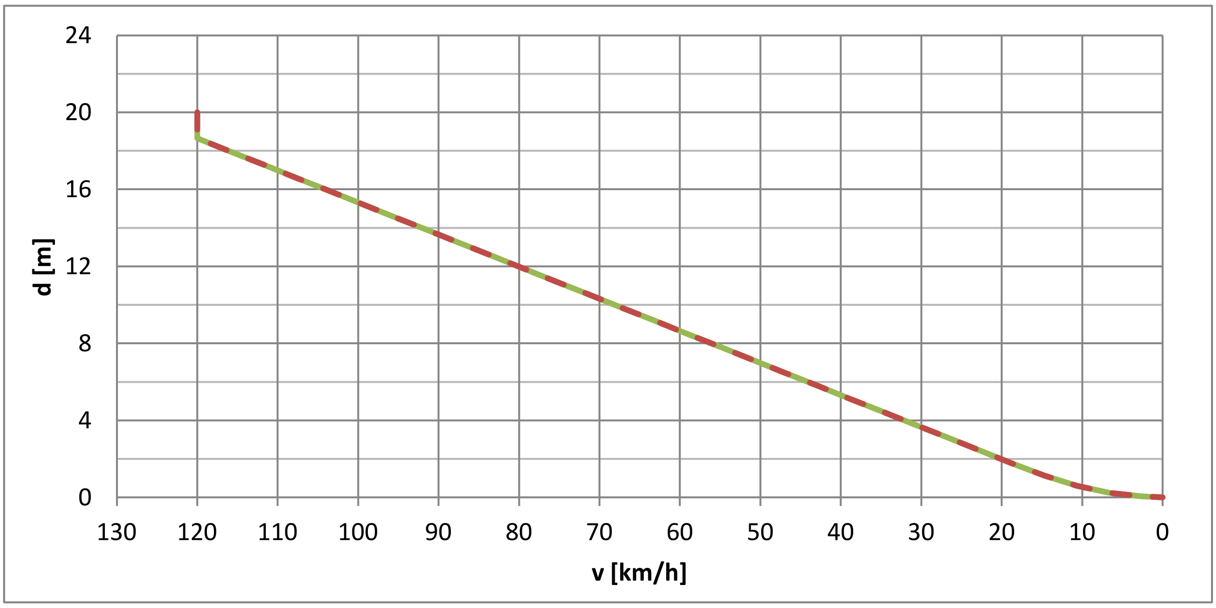

Abb. 4: Abstände in Szenario 1B

Der Abstandsverlust innerhalb der Reaktionszeit ist hier natürlich viel geringer. Aber auch in diesem Szenario kommen die Fahrzeuge Stoßstange an Stoßstande zum Stehen, was wieder unabhängig von der Verzögerung ist.

Man kann hieraus die Regel „km/h durch 6“ ableiten, muss allerdings hinzufügen, dass diese grenzwertig ist, da man sich hier bereits im Bereich des Bußgeldkatalogs befindet. Liegt der Abstand unter „5/10 des halben Tachowerts“, gibt es ein **Bußgeld** und einen **Punkt,** und unter „3/10 des halben Tachowerts“ **2 Punkte** und über 100 km/h zusätzlich ein **Fahrverbot**.

Interessanterweise sind 3/20 = 0,15 und 1/6 = 0,167, d.h. die Regel „km/h durch 6“, die den geringsten Abstand beschreibt, der bei voller Konzentration noch zu beherrschen ist und den man auf keinen Fall unterschreiten sollte, ist schon nahe der Grenze zum Fahrverbot.

Vor Beginn des Bremsvorgangs ist der **Verkehrsfluss** in diesem Szenario Φ = 81,6/min, mehr als zweieinhalbmal so hoch wie in Szenario 1A, bei gleicher Geschwindigkeit. Hier zeigt sich, dass die Regel „Halber Tachoabstand“ den Verkehrsfluss massiv **behindert**.

Szenario 1C: Geschwindigkeitsreduzierung

Dieses Szenario entspricht einer häufigen Situation auf der Autobahn.

Drei gleiche Fahrzeuge der Länge L = 4,5 m fahren mit konstanter Geschwindigkeit v_0 = 150 km/h im Abstand d_0 = 25 m („km/h durch 6“) hinter einander her. Bei t = 0 s bremst das erste Fahrzeug mit der Verzögerung a_0 = 6 m/s² auf 100 km/h ab. Die nachfolgenden Fahrzeuge machen das gleiche, allerdings jeweils erst nach der Reaktionszeit T_R = 0,6 s.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Geschwindigkeiten v der drei Fahrzeuge in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke s.

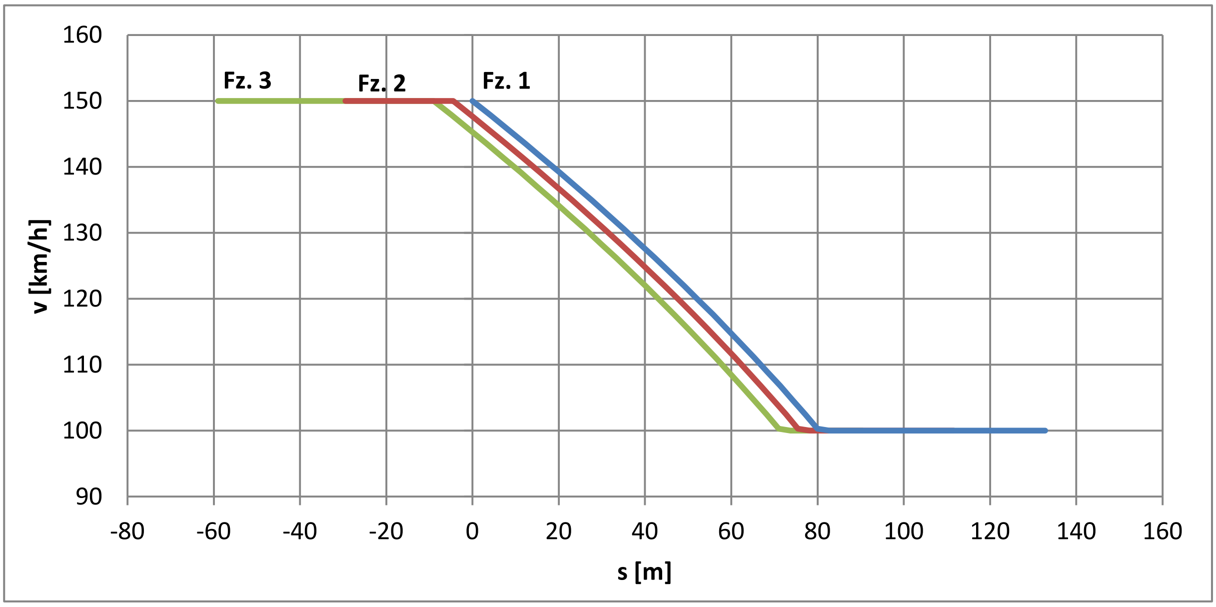

Abb. 5: Geschwindigkeiten in Szenario 1C

Interessant sind die Abstände d, die in der nächsten Abbildung dargestellt sind.

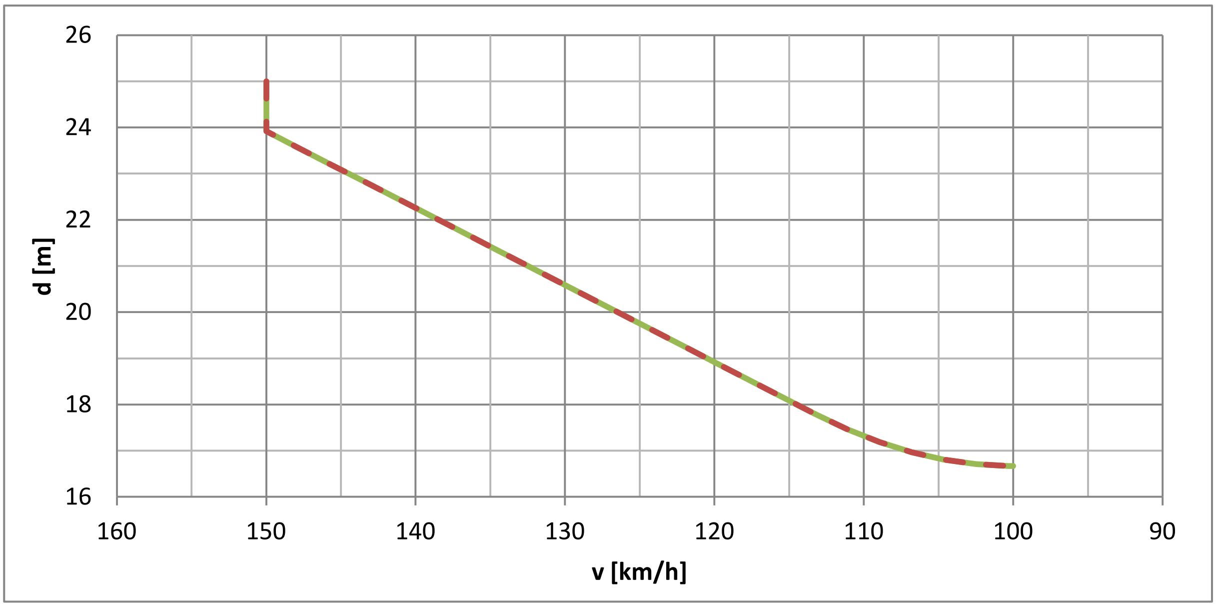

Abb. 6: Abstände in Szenario 1C

Auch hier reduzieren sich die Abstände nach der Reaktionszeit proportional zur Geschwindigkeit, und am Ende erfüllen die Abstände mit 16,67 m exakt die Regel „km/h durch 6“.

Der **Verkehrsfluss** reduziert sich nur unwesentlich von anfänglich 84,7/min auf 78,7/min. In der Praxis stellt das kein Problem dar, da es immer leichte Fluktuationen in Abständen und Geschwindigkeiten gibt.

Szenario 2A: Übermäßiges Bremsen

Dieses Szenario entspricht einem häufig auf der Autobahn gesehenen Verhalten.

Drei gleiche Fahrzeuge der Länge L = 4,5 m fahren mit konstanter Geschwindigkeit v_0 = 150 km/h im Abstand d_0 = 25 m („km/h durch 6“) hinter einander her. Bei t = 0 s bremst das erste Fahrzeug mit der moderaten Verzögerung a_0 = 5 m/s² auf 100 km/h ab. Die nachfolgenden Fahrzeuge bremsen jeweils nach der Reaktionszeit T_R = 0,6 s, allerdings jedes um 1,25 m/s² stärker als das vorausfahrende. Beim dritten Fahrzeug beträgt die Verzögerung 7,5 m/s², was schon nahe an einer Vollbremsung liegt.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Geschwindigkeiten v der drei Fahrzeuge in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke s.

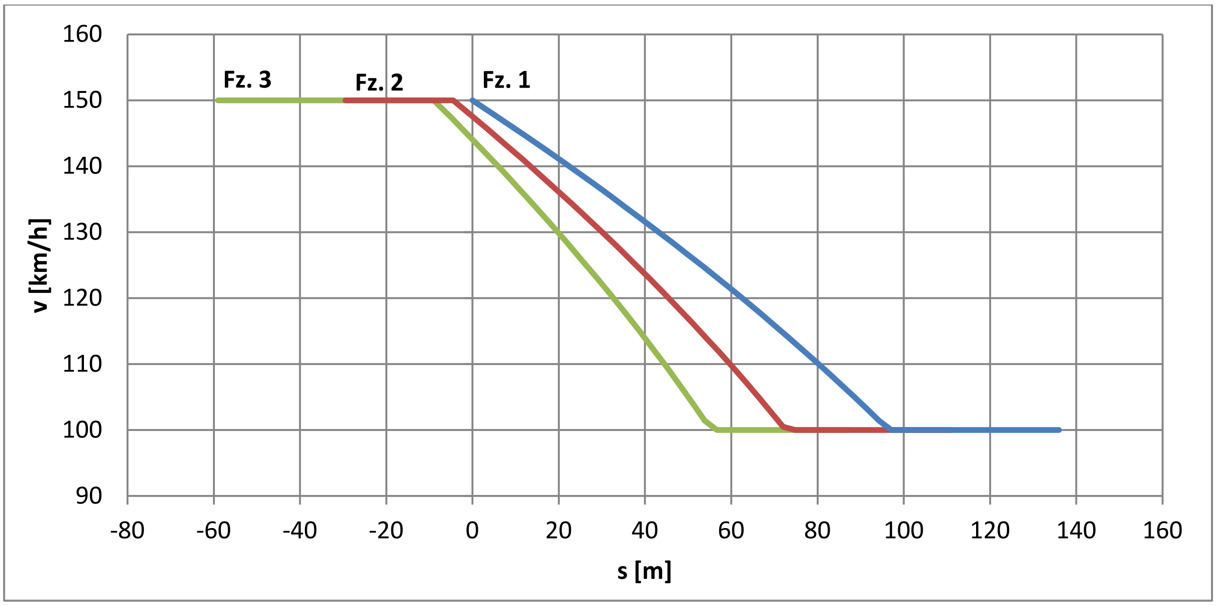

Abb. 7: Geschwindigkeiten in Szenario 2A

Interessant sind die Abstände d, die in der nächsten Abbildung dargestellt sind.

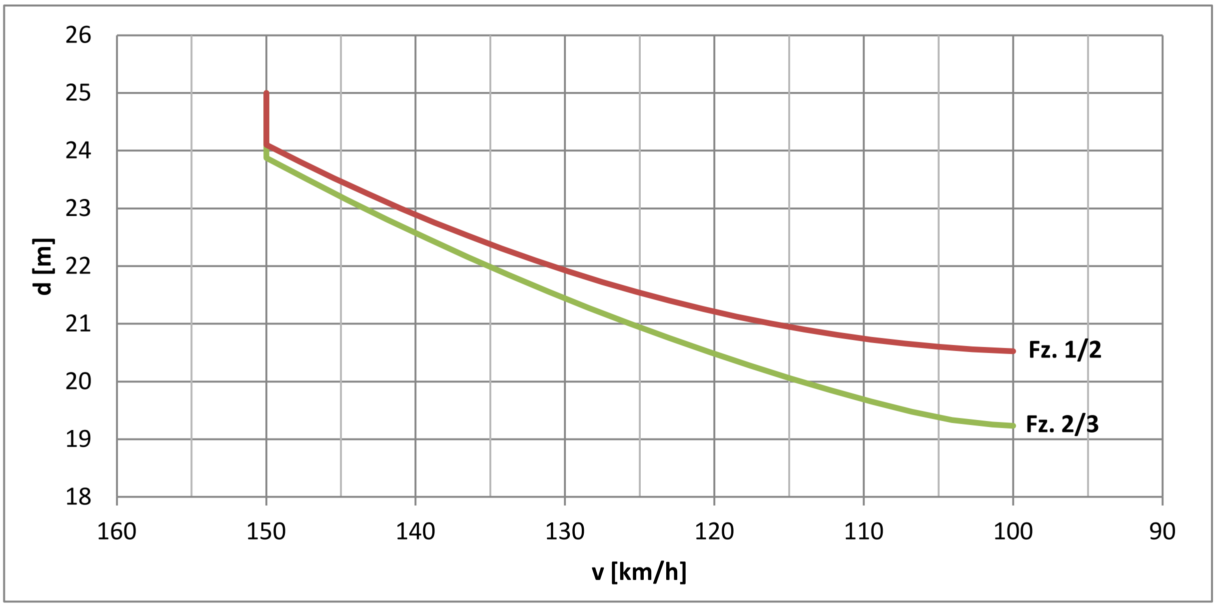

Abb. 8: Abstände in Szenario 2A

Dadurch, dass die Fahrzeuge 2 und 3 stärker bremsen als notwendig, bleiben die Abstände deutlich größer als in Szenario 1C. Dadurch reduziert sich der **Verkehrsfluss** ganz erheblich von 84,7/min auf 68,4/min. Das ist ein Problem für den nachfolgenden Verkehr und kann der Auslöser für einen **Stau** sein, mit einem erhöhten Unfallrisiko. Dieses Szenario zeigt also ein echtes **Fehlverhalten**. Um das zu vermeiden, gilt:

Wenn man die Geschwindigkeit reduziert, muss man in gleichem Maße den Abstand zum vorausfahrenden Fahrzeug reduzieren, darf deshalb nicht stärker bremsen als der Vorausfahrende, weil man sonst riskiert, im nachfolgenden Verkehr einen Stau hervorzurufen.

Szenario 2B: Verzögerte Reaktion

Abstand und Reaktionszeit müssen immer zueinander passen. Was passiert, wenn das nicht der Fall ist, zeigt dieses Szenario.

Drei gleiche Fahrzeuge der Länge L = 4,5 m fahren mit konstanter Geschwindigkeit v_0 = 150 km/h im Abstand d_0 = 25 m („km/h durch 6") hinter einander her. Bei t = 0 s bremst das erste Fahrzeug mit der moderaten Verzögerung a_0 = 5 m/s² auf 100 km/h ab. Die nachfolgenden Fahrzeuge bremsen jeweils nach der für den Abstand zu großen Reaktionszeit T_R = 1,0 s, allerdings jedes um 1,5 m/s² stärker als das vorausfahrende. Beim dritten Fahrzeug beträgt die Verzögerung 8,0 m/s², was einer Vollbremsung entspricht.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Geschwindigkeiten v der drei Fahrzeuge in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke s.

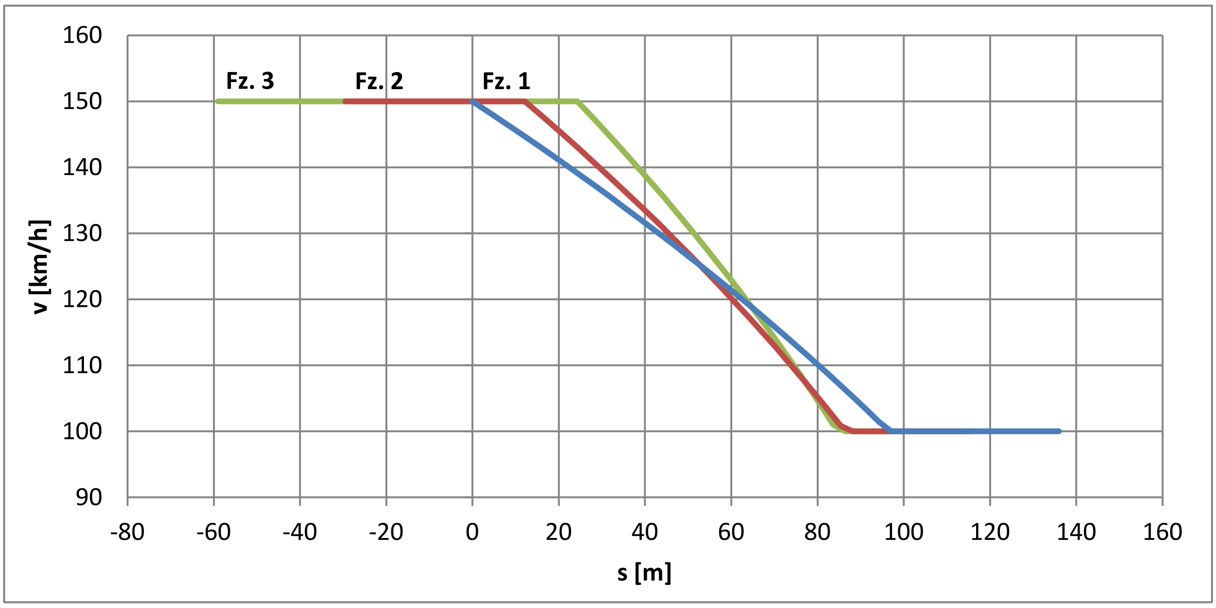

Abb. 9: Geschwindigkeiten in Szenario 2B

Man sieht, dass die Fahrzeuge 2 und 3 später, dafür aber stärker bremsen als Fahrzeug 1. Die Abstände der Fahrzeuge sind in der nächsten Abbildung dargestellt.

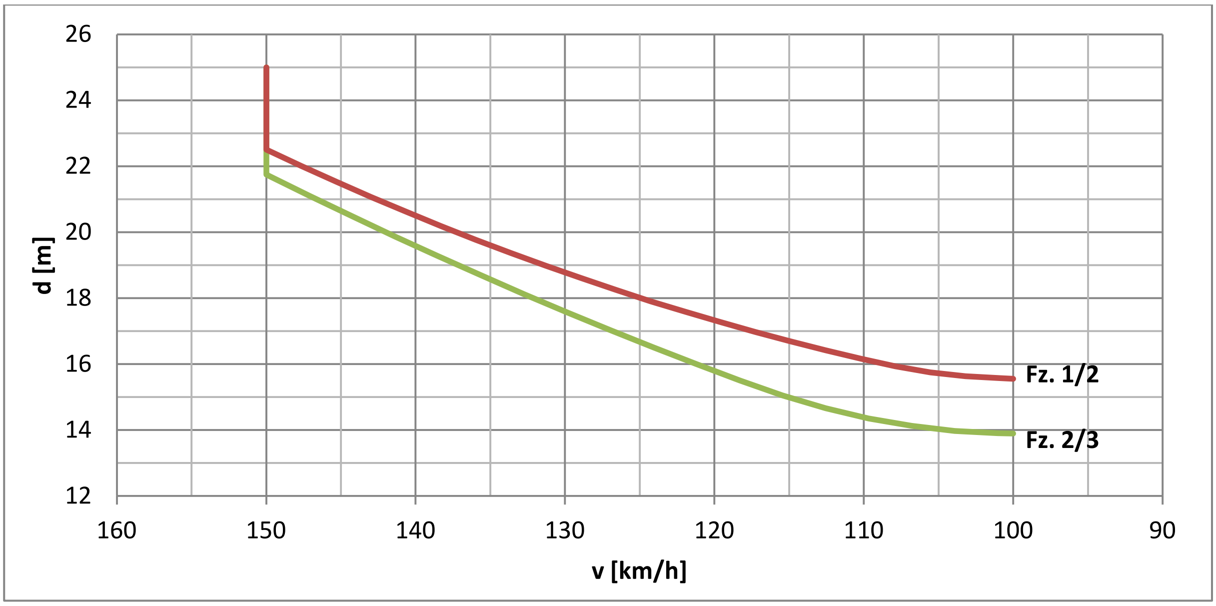

Abb. 10: Abstände in Szenario 2B

Man sieht, dass trotz der starken Verzögerung, die bei Fahrzeug 3 einer Vollbremsung entspricht, die Abstände für die gefahrene Geschwindigkeit zu klein sind, insbesondere zwischen Fahrzeug 2 und 3.

Szenario 2C: Gefährliche Situation

Fahrzeug 2 müsste stärker verzögern, mit 7 m/s², um den Mindestabstand von 16,67 m bei 100 km/h einzuhalten. Fahrzeug 3 kann aber nicht stärker bremsen. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Abstände in diesem Fall.

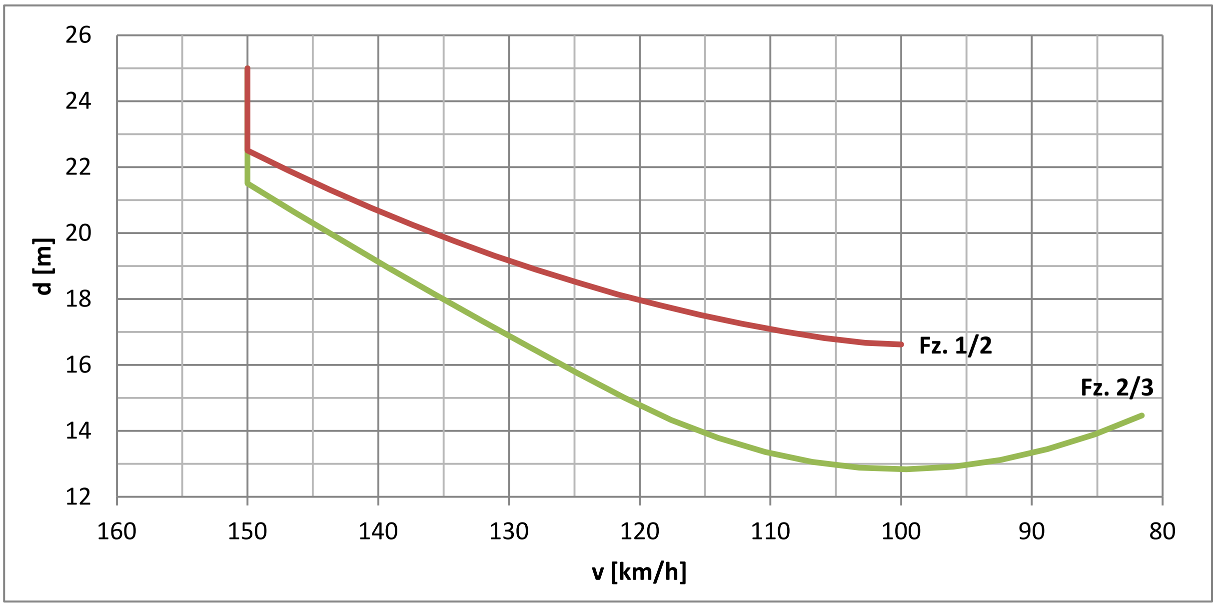

Abb. 11: Abstände in Szenario 2C

Der Abstand zwischen Fahrzeug 2 und Fahrzeug 3 würde sich auf ca. 12,8 m bei 100 km/h reduzieren. Fahrzeug 3 müsste deshalb weiter bremsen und damit die Geschwindigkeit weiter reduzieren, um den Abstand wieder zu vergrößern. – Alles in allem eine **gefährliche Situation**. Um eine solche zu vermeiden, gilt:

Wenn man sich als Fahrer nicht voll auf den Straßenverkehr konzentrieren kann und sich dadurch die Reaktionszeit verlängert, muss man den Abstand zum Vorausfahrenden entsprechend vergrößern.

Die nachfolgende Tabelle gibt den Faktor F_A an, mit dem bei einer Reaktionszeit T_R die Geschwindigkeit in km/h zu multiplizieren ist, um den Mindestabstand d_0 in Metern zu erhalten, sowie dessen Kehrwert $1/F_A$, durch den die Geschwindigkeit zu teilen ist.

T_R [s]	F_A	$1/F_A$	Bemerkungen
0,50	0,139	7,20	
0,54	0,150	6,67	2 Punkte & Fahrverbot
0,60	0,167	6,00	Fokussierter Fahrer
0,72	0,200	5,00	
0,80	0,222	4,50	
0,90	0,250	4,00	Bußgeld & 1 Punkt
1,00	0,278	3,60	
1,20	0,333	3,00	
1,50	0,417	2,40	
1,80	0,500	2,00	Fahrschule
2,00	0,556	1,80	

Überholvorgänge

Abstand bei unterschiedlichen Geschwindigkeiten

Nähert sich ein schnelleres Fahrzeug 2 mit der Geschwindigkeit v_2 einem langsameren Fahrzeug 1, dessen Geschwindigkeit $v_1 < v_2$ ist, sind die normalen Abstandsregeln nicht anwendbar, denn das vorausfahrende Fahrzeug hat einen kürzeren Bremsweg.

Nimmt man an, dass beide Fahrzeuge eine Vollbremsung bis zum Stillstand machen, so ergibt sich mit den Formeln für den Bremsweg bzw. den Anhalteweg (siehe Seite 3):

Fahrzeug 1: $s_B^{(1)} = ½\, v_1^2/a_0$

Fahrzeug 2: $s_A^{(2)} = v_2 T_R + ½\, v_2^2/a_0$

Für den Mindestabstand gilt dann:

$$d_2 = s_A^{(2)} - s_B^{(1)} = v_2 T_R + ½\, (v_2^2 - v_1^2)/a_0$$

Der Abstand muss folglich größer sein als bei gleicher Geschwindigkeit.

Umgekehrt kann der Abstand beim Einscheren nach dem Überholen geringer sein als bei gleicher Geschwindigkeit:

$$d_1 = s_A^{(1)} - s_B^{(2)} = v_1 T_R - \tfrac{1}{2}\,(v_2^2 - v_1^2)/a_0$$

Bei größeren Geschwindigkeitsunterschieden wird dieser rechnerische Wert negativ. Der Spurwechsel kann in diesem Fall – physikalisch betrachtet – begonnen werden, sobald man das überholte Fahrzeug passiert hat. Allerdings sollte der Überholte nicht „geschnitten“ werden, weil es dabei zu einer Schreckreaktion kommen könnte.

Szenario 3A: Überholen mit konstanter Geschwindigkeit

Auf der Autobahn beobachtet man häufig, dass das überholende Fahrzeug nur die Spur wechselt, aber nicht beschleunigt. Die Dauer des Überholvorgangs ergibt sich aus der Geschwindigkeitsdifferenz der Fahrzeuge und den notwendigen Abständen vor und nach dem Überholen.

Die nachfolgende Abbildung zeigt einen Überholvorgang mit v_1 = 100 km/h und v_2 = 150 km/h. Die weiteren Parameter der Simulation sind L = 4,5 m, T_R = 0,6 s und a_0 = 8 m/s².

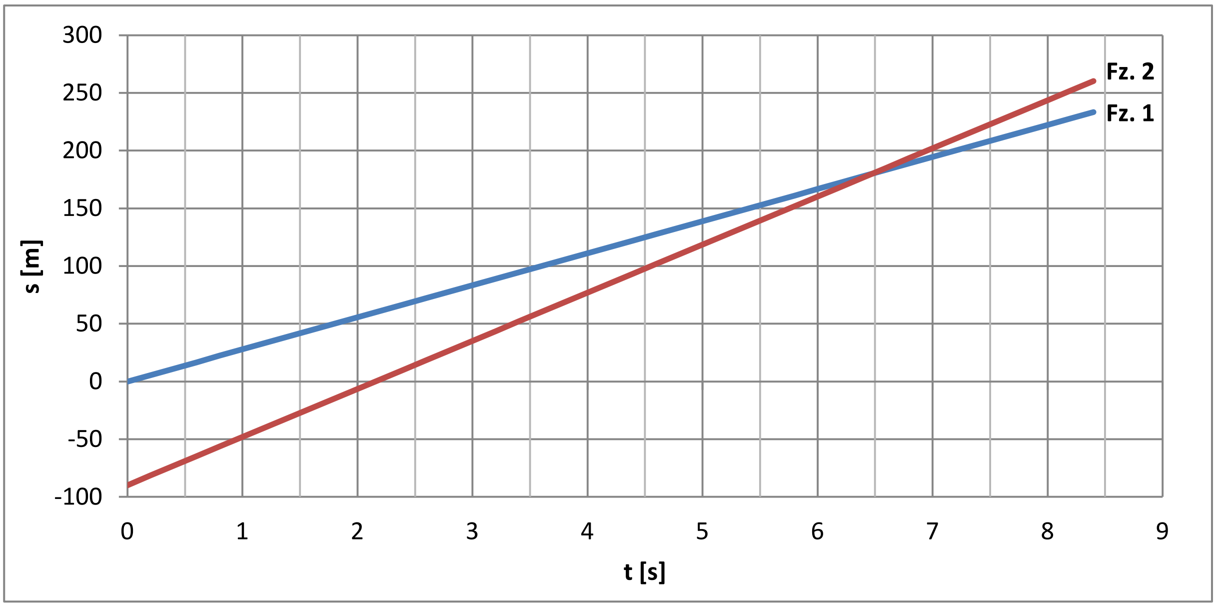

Abb. 12: Zurückgelegte Strecken in Szenario 3A

Nach 6,8 s hat Fahrzeug 2 Fahrzeug 1 passiert und kann wieder einscheren.

Anders sieht es bei v_2 = 110 km/h aus. Nach 13,5 s hat Fahrzeug 2 Fahrzeug 1 passiert, muss aber noch einen Vorsprung von 6,54 m vor Fahrzeug 1 erreichen, bevor es wieder einscheren kann. Insgesamt dauert der Überholvorgang deshalb 15,8 s.

Das nachfolgende Diagramm zeigt die Dauer T_E [s] des Überholvorgangs bis zum Wiedereinscheren in Abhängigkeit von den Geschwindigkeiten der beiden Fahrzeuge.

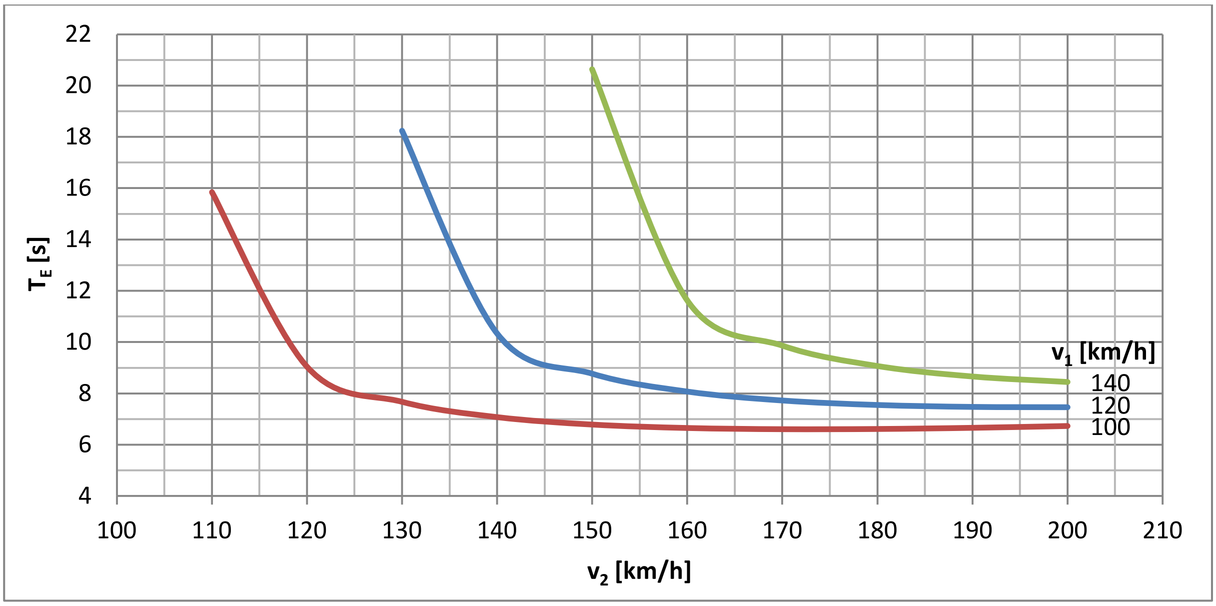

Abb. 13: Dauer des Überholvorgangs in Szenario 3A

Man sieht, dass die Geschwindigkeitsdifferenz mindestens 25 km/h betragen sollte, da sonst die Dauer des Überholvorgangs erheblich zunimmt. Deutlich größere Geschwindigkeitsdifferenzen bringen nur einen vergleichsweise geringen Vorteil, da früher ausgeschert werden muss, um den Mindestabstand nicht zu unterschreiten.

Szenario 3B: Überholen mit Beschleunigungsphase

Betrachten wir nochmal den Fall v_1 = 100 km/h und v_2 = 110 km/h. Wenn Fahrzeug 2 mit einer moderaten Beschleunigung a_2 = 2 m/s² über 2,9 s die Geschwindigkeitsdifferenz bis auf 30 km/h erhöht, reduziert sich die Zeit für den Überholvorgang von 15,8 s auf 5,4 s.

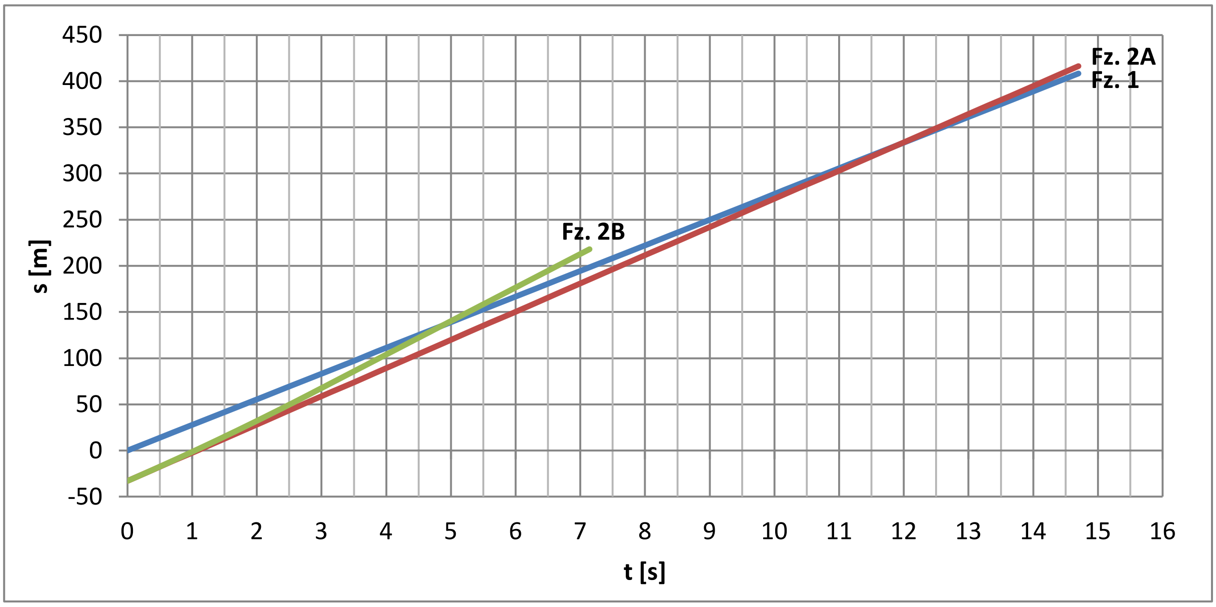

Abb. 14: Überholvorgänge in Szenario 3A ohne und 3B mit Beschleunigung

Anmerkungen zum „Energieverbrauch“ beim Beschleunigen

Beim Beschleunigen wird die im Treibstoff bzw. bei Elektrofahrzeugen in der Batterie gespeicherte Energie mit Hilfe des Motors in kinetische Energie des Fahrzeugs umgewandelt. Diese Energie ist nicht verloren, sondern lässt das Fahrzeug auch bei Schubabschaltung weiter rollen. Erst wenn das Fahrzeug durch Reibungsverluste und ggf. Betätigung der Bremsen abgebremst wird, wird die kinetische Energie in Wärme umgewandelt und ist damit endgültig verloren. Besitzt das Fahrzeug eine Rekuperation, wird ein Teil der Bremsenergie in elektrische Energie umgewandelt und gespeichert.[3]

Im Endeffekt ist es nur der höhere Luftwiderstand, der Energie kostet, was aber für die kurze Zeit des Überholvorgangs vernachlässigbar ist. Deshalb gilt:

Beim Überholen auf der Autobahn sollte man beschleunigen, wenn die Geschwindigkeitsdifferenz weniger als 25 - 30 km/h beträgt, zumindest bis zur erlaubten Höchstgeschwindigkeit. Beim Wiedereinscheren sollte man möglichst nicht bremsen müssen.

Beim Überholen auf der Landstraße muss aus Sicherheitsgründen immer maximal beschleunigt werden, zumindest bis die erlaubte Höchstgeschwindigkeit erreicht ist.

Szenario 3C: Überholen auf der Landstraße

Beim Überholen auf der Landstraße ist nicht die benötigte Zeit entscheidend sondern die benötigte Strecke, die auf der Gegenfahrbahn zurückgelegt werden muss.

Wir betrachten hier den Fall, dass zwei Fahrzeuge der Länge L mit der Geschwindigkeit v_0 im Abstand $d_0 = v_0 T_R$ hintereinander herfahren. Fahrzeug 2 beschleunigt zum Überholen mit der Beschleunigung a_2 bis auf die erlaubte Höchstgeschwindigkeit v_{max}.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die zurückgelegten Strecken der Fahrzeuge für die folgenden Parameter:

$L = 4{,}50$ m $v_0 = 60{,}0$ km/h $a_2 = 4{,}0$ m/s² $v_{max} = 100{,}0$ km/h $T_R = 0{,}6$ s

Bei der angesetzten Beschleunigung beträgt die Zeit, um von 0 auf 100 km/h zu beschleunigen, 6,9 s. Für die Beschleunigung von 60 auf 100 km/h werden nur 2,8 s benötigt. Nach T_E = 3,1 s hat Fahrzeug 2 Fahrzeug 1 überholt und kann wieder einscheren. Die dabei von Fahrzeug 2 zurückgelegte Strecke beträgt S_E = 70,6 m.

Da wir mit konstanten Geschwindigkeiten bzw. Beschleunigungen rechnen, gibt es für dieses Problem auch eine analytische Lösung. Diese ist im Anhang zu finden.

[3] Siehe z.B. https://www.baum-bmwshop24.de/blog/lexikon/rekuperation/

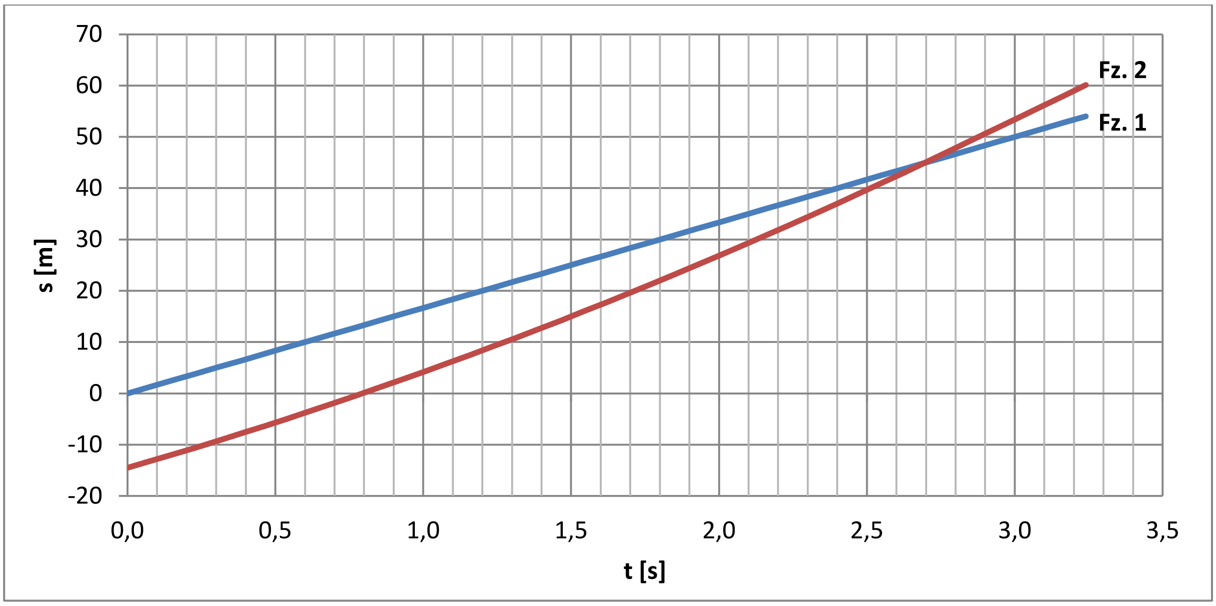

Abb. 15: Überholvorgang in Szenario 3C mit Beschleunigung von 60 auf 100 km/h

Das nachfolgende Diagramm zeigt die für den Überholvorgang benötigte Strecke S_E in Abhängigkeit von der Ausgangsgeschwindigkeit v_0 und der Beschleunigung a_2 des überholenden Fahrzeugs (alle anderen Parameter wie oben).

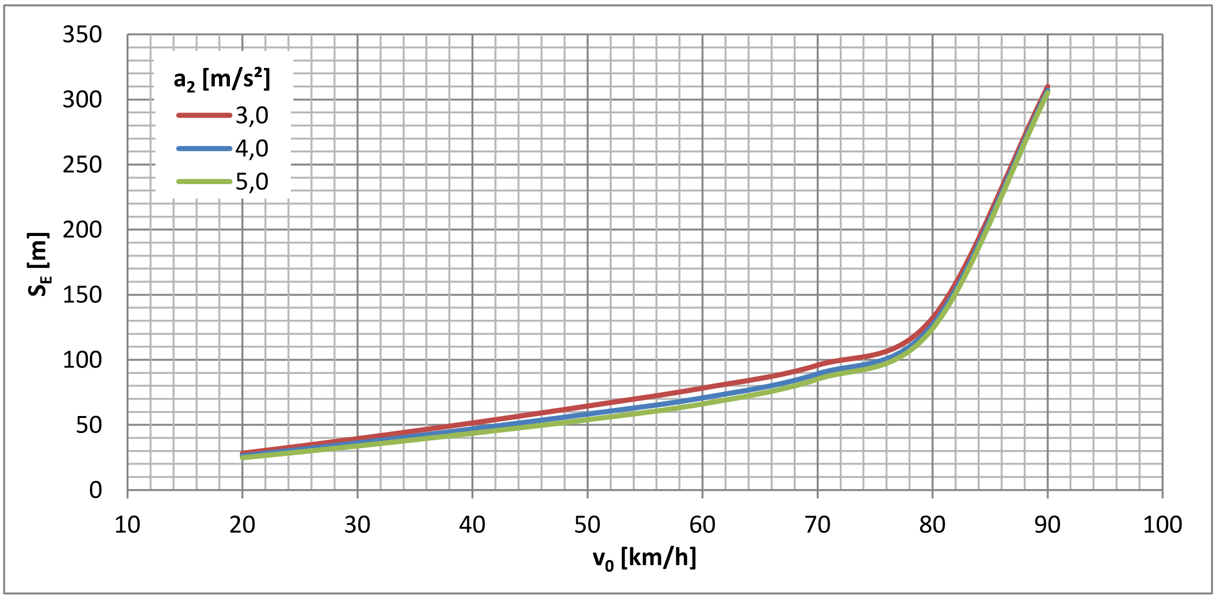

Abb. 16: Beim Überholen zurückgelegte Strecke in Szenario 3C

Man sieht, dass die benötigte Strecke stark zunimmt, wenn die Geschwindigkeitsdifferenz weniger als 20 km/h beträgt. Die Beschleunigung hingegen spielt keine große Rolle. Sie sollte aber möglichst nicht weniger als 3 m/s² betragen, was einer Beschleunigung von 0 auf 100 km/h in 9,3 s entspricht.

Nun spielt beim Überholen auf der Landstraße der Gegenverkehr eine entscheidende Rolle. Ein entgegenkommendes Fahrzeug legt in der Zeit T_E des Überholvorgangs maximal die Strecke $v_{max}T_E$ zurück. Addiert man diese Strecke zu der Strecke S_E hinzu, erhält man die für einen Überholvorhang erforderliche freie Strecke S_F. Diese ist in der nachfolgenden Abbildung in Abhängigkeit von der Ausgangsgeschwindigkeit v_0 und der Beschleunigung a_2 des überholenden Fahrzeugs dargestellt.

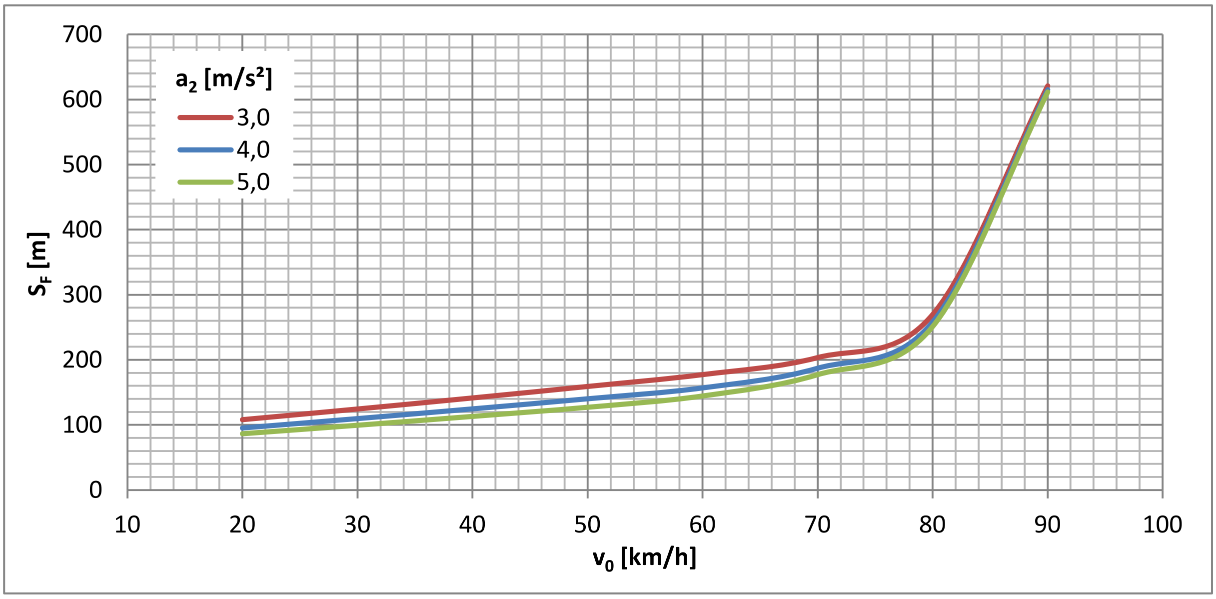

Abb. 17: Zum Überholen benötigte freie Strecke in Szenario 3C

Hinweis: Nur innerhalb der Strecke S_F darf sich kein Gegenverkehr befinden.

Anfahren an der Ampel

Auch beim Anfahren an der Ampel muss man damit rechnen, dass der Vorausfahrende bremst, und muss deshalb den Mindestabstand einhalten, der mit zunehmender Geschwindigkeit größer wird. Wir rechnen hier mit größeren Abständen, weil (a) die Geschwindigkeiten nicht konstant sind und (b) die Verkehrssituation komplexer ist. Deshalb rechnen wir mit T_R = 0,9 s. Bei diesem Wert beträgt der Abstand 12,5 m bei 50 km/h. Das sind „5/10 des halben Tachowerts", ist also gerade noch „legal".

Szenario 4A: Optimales Anfahren

Fahrzeuge der Länge L = 4,5 m stehen in einem Abstand von d_0 = 1,5 m an einer Ampel. Bei Grün fährt das erste Fahrzeug an und beschleunigt mit a_1 = 2 m/s² in 7 s auf 50 km/h. Die weiteren Fahrzeuge folgen jeweils mit einer Zeitverzögerung von T_A = 0,7 s. Hier gehen wir davon aus, dass das Anfahren des davor stehenden Fahrzeugs nicht unerwartet kommt. Die Fahrzeuge beschleunigen ebenfalls mit a = 2 m/s², reduzieren die Beschleunigung jedoch, wenn der Mindestabstand zum vorausfahrenden Fahrzeug $d_i = v_iT_R$ unterschritten wird (vgl. Abschn. Überholvorgänge).

Die nachfolgende Abbildung zeigt die zurückgelegten Strecken s der ersten acht Fahrzeuge in Abhängigkeit von der Zeit t.

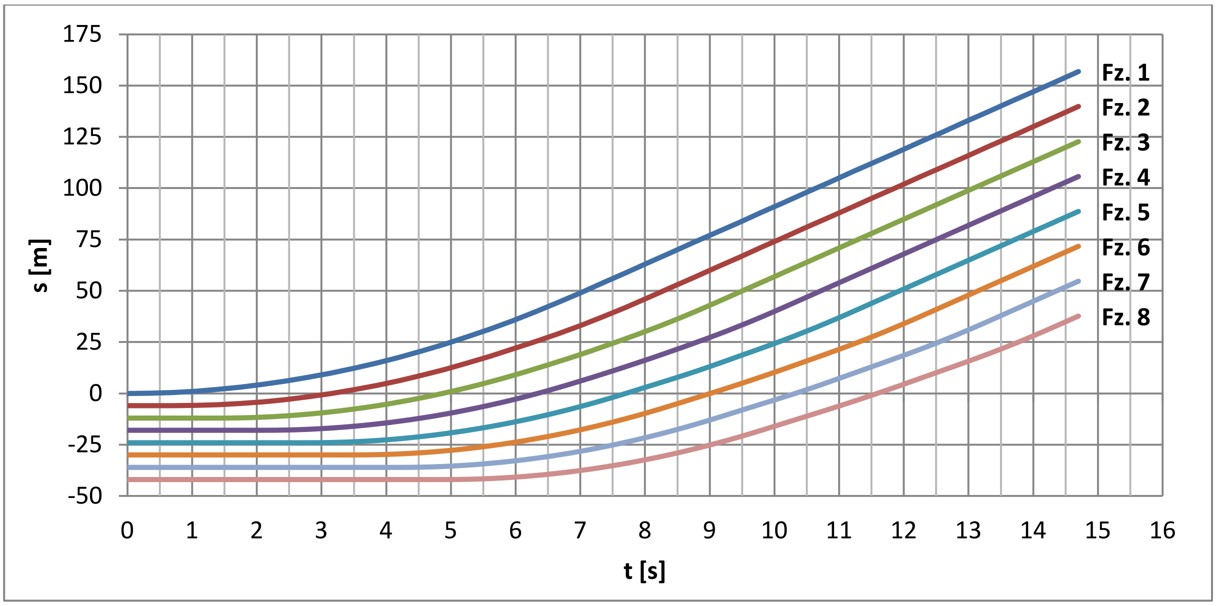

Abb. 18: Zurückgelegte Strecken in Szenario 4A

Fahrzeug 8 hat nach 11,6 s die Ampel passiert, Fahrzeug 14 nach 19,2 s. Wenn wir von einer Grünphase der Ampel von 20 s ausgehen, schaffen es in diesem Szenario also 14 Fahrzeuge innerhalb einer Grünphase, die Ampel zu passieren. Die nachfolgende Tabelle zeigt die Abhängigkeit dieser Zahl von der Anfahrverzögerung T_A und der Beschleunigung a_1.

a_1 [m/s²]	0,5	0,75	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
T_A [s] T_{50} [s]	28	19	14	9,3	6,9	5,6	4,6	4,0	3,5
0,7	9	11	12	13	14	15	16	16	16
0,8	8	10	11	13	14	15	15	15	15
0,9	8	9	11	12	13	14	14	14	14
1,0	8	8	10	11	12	13	13	13	13
1,2	7	8	9	10	11	11	11	12	12
1,4	6	7	8	9	9	10	10	10	11
1,6	6	7	7	8	9	9	9	9	10
2,0	5	6	6	7	7	8	8	8	8
2,5	5	5	5	6	6	6	7	7	7

Zur Veranschaulichung der Beschleunigungswerte ist die Zeit T_{50} angegeben, die für die Beschleunigung auf 50 km/h benötigt wird.

Die Tabelle zeigt, dass man mit einer höheren Beschleunigung eine Zeitverzögerung beim Anfahren nur teilweise kompensieren kann. Die Zeitverzögerung beim Anfahren sollte maximal 1 s betragen. Deshalb ist die Aufmerksamkeit des Fahrers an der Ampel entscheidend.[4]

[4] Bei Fahrzeugen mit Automatikgetriebe verursacht eine Start-Stop-Automatik eine zusätzliche Anfahrverzögerung, die durch eine höhere Beschleunigung kompensiert werden kann, wenn der Fahrer rechtzeitig reagiert.

Darüber hinaus sollte die Beschleunigung mindestens 1,5 - 2 m/s² betragen.

Es reicht schon ein Fahrer, der „nicht in die Gänge kommt", um den „Durchsatz" der Ampel deutlich zu reduzieren.

Szenario 4B: Nur ein „Trödler"

Dieses Szenario ist identisch mit Szenario 4A mit der Ausnahme von Fahrzeug 3, das 2,5 s braucht, um dann mit einer Beschleunigung von nur 0,75 m/s² loszufahren. Das hat zur Folge, dass auch die nachfolgenden Fahrzeuge nicht stärker beschleunigen können. Das Ergebnis ist in der nachfolgenden Abbildung zu sehen.

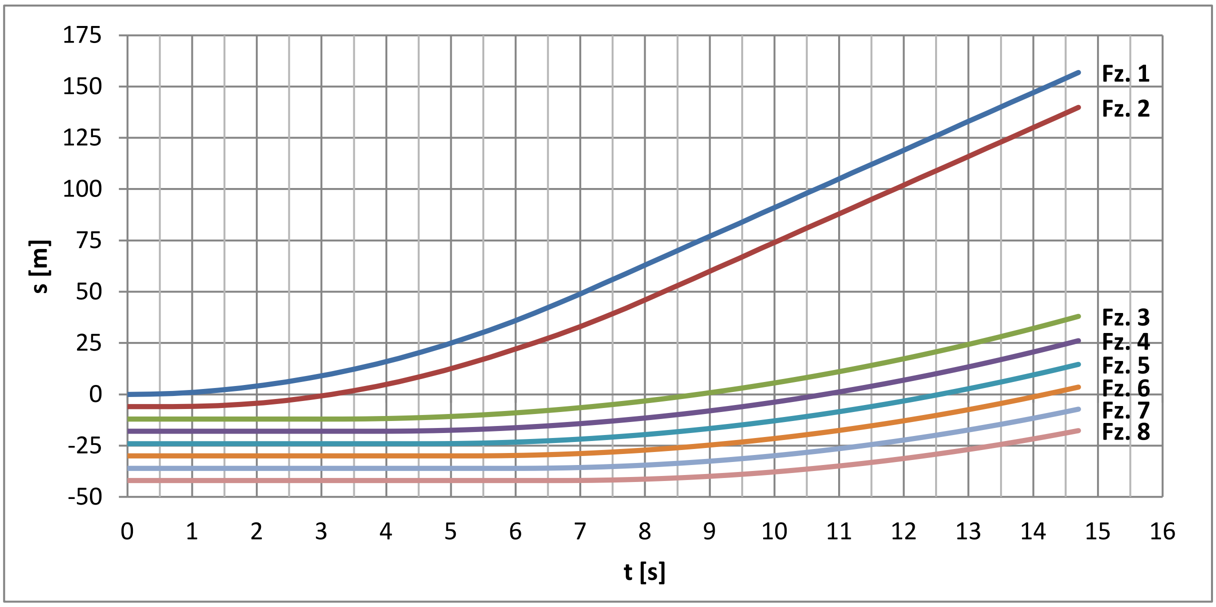

Abb. 19: Zurückgelegte Strecken in Szenario 4B

Nur 9 Fahrzeuge schaffen es, innerhalb einer Grünphase von 20 s die Ampel zu passieren, statt 14 in Szenario 4A. Der „Durchsatz" der Ampel reduziert sich um mehr als ein Drittel.

Hierzu unter Verweis auf die Anmerkungen zum „Energieverbrauch" beim Beschleunigen der wichtige Hinweis:

Benzin spart man nicht, indem man nur zögerlich beschleunigt, sondern indem man nicht mehr als nötig bremst.

Dazu ist hervorzuheben, dass bei Ottomotoren der Wirkungsgrad **bei Volllast am höchsten** ist.[5] Die weit verbreitete Empfehlung, möglichst niedertourig zu fahren, ist irreführend. Moderne Pkw haben Automatikgetriebe mit 7 oder 8 Gängen, und die Automatik wählt für jede Fahrsituation den optimalen Gang. Der Fahrer muss sich über Drehzahlen keine Gedanken machen.

[5] Siehe z.B. https://www.kfz.net/autolexikon/wirkungsgrad/

Entscheidend ist das Bremsen: Wenn man auf eine rote Ampel zufährt, sollte man so früh vom Gas gehen, dass man nur noch auf den letzten Metern bremsen muss.

Grundsätzliches zum Energiebedarf

Zuerst einmal gilt: Je kürzer die Fahrzeit desto geringer der Energiebedarf. Das leuchtet sofort ein für alle konstanten Verbraucher, insbesondere die gesamte Bordelektrik und -elektronik, vom Licht über Radio und Navigation bis zur Heckscheibenheizung, die bei modernen Fahrzeugen einen nicht unerheblichen Anteil ausmachen.

Der Rollwiderstand ist in erster Näherung unabhängig von der Geschwindigkeit.[6] Anders sieht es beim Luftwiderstand aus, dieser nimmt mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zu:

$$F_W = c_W A \tfrac{1}{2}\rho v^2$$

Dabei ist c_W der Widerstandsbeiwert, A die Querschnittsfläche und ρ die Luftdichte. Vom c_W-Wert ist häufig die Rede, dass aber die Querschnittsfläche einen ebenso großen Einfluss hat, wird oft übersehen. Deshalb ist der Luftwiderstand eines SUV sehr viel größer als der eines Sportwagens.

Der oft gelesene Hinweis, dass die zur Überwindung des Luftwiderstands benötigte Leistung $P = F\,v$ sogar proportional zur dritten Potenz der Geschwindigkeit ist, ist zwar korrekt, aber in diesem Zusammenhang irrelevant, denn die benötigte Energie ist ***Kraft mal Weg***, also nur proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit.

Da die Fahrzeit umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit ist, ist auch der Energiebedarf der konstanten Verbraucher umgekehrt proportional zur Geschwindigkeit. Der zur Überwindung des Rollwiderstands benötigte Energiebedarf ist weitgehend unabhängig von der Geschwindigkeit und der zur Überwindung des Luftwiderstands benötigte Energiebedarf proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit. Daraus folgt, dass es eine Geschwindigkeit gibt, bei der der Energiebedarf ein Minimum hat. Diese hängt von den genannten Einflussfaktoren ab, ist also z.B. bei einem Sportwagen erheblich höher als bei einem SUV.

Dies gilt für konstante Geschwindigkeiten. Zum Beschleunigen und Bremsen gilt das bereits Gesagte. Hervorzuheben ist hierbei, dass die benötigte Energie proportional zum Gewicht des Fahrzeugs ist.

Grundsätzlich muss man neben der individuellen auch die gesamthafte Sicht berücksichtigen. Der „Trödler“ in Szenario 4B verbraucht selbst nicht mehr Energie, aber die Fahrzeuge 10 bis 14 aufgrund der zusätzlichen Ampelphase, insbesondere beim Abbremsen und durch die konstanten Verbraucher.

---

[6] Darüber hinausgehende Details findet man in der Fachliteratur unter dem Stichwort ‚Fahrwiderstände‘, z.B. https://www.ingenieur-buch.de/media/blfa_files/9783658019914-Leseprobe.pdf

Einfluss von Fluktuationen

Die bisherigen Szenarien haben idealtypisches Verhalten beschrieben. In der Praxis gibt es aber Fluktuationen, z.B. in den Abständen der Fahrzeuge und den Reaktionszeiten der Fahrer. Deren Einfluss soll im Folgenden unter Verwendung von Zufallszahlen untersucht werden.

Wir gehen von n Fahrzeugen aus, die die anfänglichen Abstände

$$d_0^{(k)} = (1 + \zeta_d^{(k)})\, d_0$$

haben, wobei $\zeta_d^{(k)}$ eine gleichverteilte Zufallszahl für Fahrzeug k = 2 … n ist, für die gilt:

$$-\delta_d \le \zeta_d^{(k)} < \delta_d \quad \text{mit} \quad \delta_d \ll 1$$

Für die Reaktionszeiten gilt entsprechend:

$$T_R^{(k)} = (1 + \zeta_R^{(k)})\, T_R \quad \text{mit} \quad -\delta_R \le \zeta_R^{(k)} < \delta_R \quad \text{und} \quad \delta_R \ll 1$$

Szenario 5A: Kolonnenfahrt

Fahrzeug 1 fährt mit konstanter Geschwindigkeit v_0. Die nachfolgenden Fahrzeuge versuchen, mit minimalem Abstand zu folgen. In diesem Szenario fluktuieren auch die anfänglichen Geschwindigkeiten für die Fahrzeuge k = 2 … n:

$$v_0^{(k)} = (1 + \zeta_v^{(k)})\, v_0 \quad \text{mit} \quad -\delta_v \le \zeta_v^{(k)} < \delta_v \quad \text{und} \quad \delta_v \ll 1$$

In jedem Zeitschritt i der Simulation wird der Abstand des Fahrzeugs k zum Vorausfahrenden im Vergleich zum Mindestabstand $v_i^{(k)}\, T_R^{(k)}$ ausgewertet und wenn er unterschritten wird, wird das Fahrzeug im folgenden Zeitschritt mit $a_i^{(k)} = -a_-$ abgebremst. Da gleiche geschieht, wenn sich der Abstand schnell verringert, was mit dem folgenden Kriterium festgestellt wird:

$$(d_i^{(k)} - d_{i-1}^{(k)})/\Delta t < -\delta_d\, v_i^{(k)}$$

Umgekehrt wird Fahrzeug k mit $a_i^{(k)} = a_+$ beschleunigt, wenn der Vorausfahrende sich entfernt und der Abstand größer als der Mindestabstand ist.

Hierbei nicht explizit berücksichtigt ist, dass die Fahrer den Abstand zum Vorausfahrenden systematisch falsch einschätzen können und damit die Differenz zum Mindestabstand. Da der Mindestabstand als $v_i^{(k)}\, T_R^{(k)}$ berechnet wird, ist dieser Effekt äquivalent zu einer Abweichung in der Reaktionszeit $T_R^{(k)}$ und wird damit implizit berücksichtigt.

Folgende Parameter wurden für dieses Szenario verwendet:

$L = 4{,}50$ m	$d_0 = 30{,}00$ m	$\delta_d = 10{,}0$ %	$v_0 = 120{,}0$ km/h	$\delta_v = 10{,}0$ %
$a_- = 2{,}00$ m/s²	$a_+ = 1{,}00$ m/s²	$T_R = 0{,}90$ s	$\delta_R = 20{,}0$ %	$\Delta t = 0{,}40$ s

Die nachfolgende Abbildung zeigt die Positionen der Fahrzeuge relativ zum ersten.

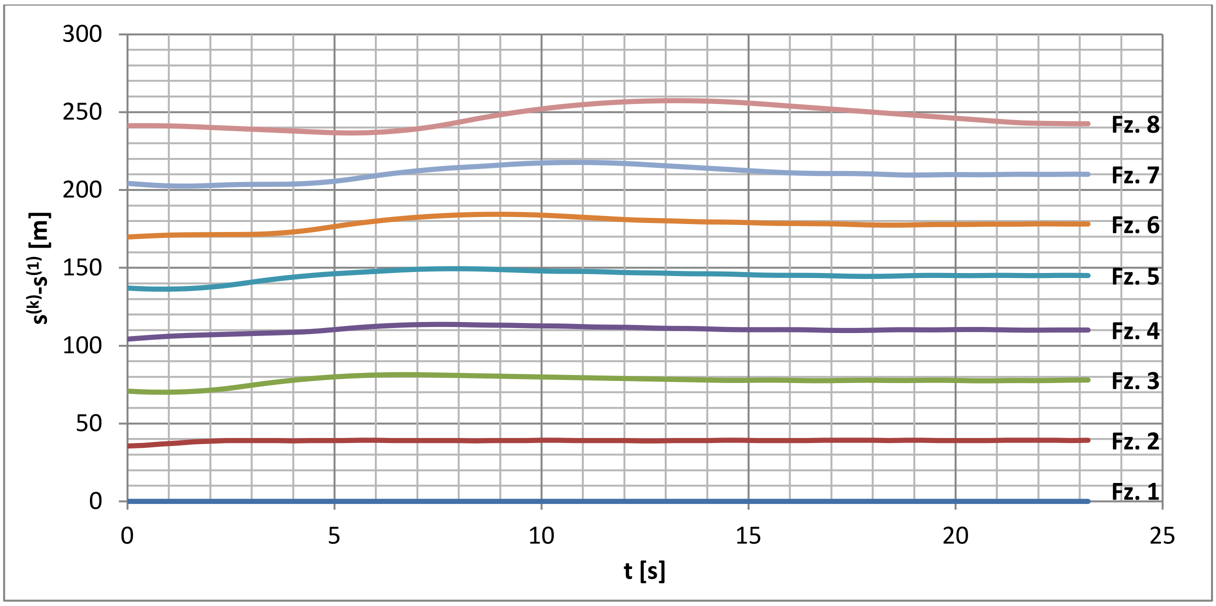

Abb. 20: Positionen relativ zum ersten Fahrzeug in Szenario 5A

Man sieht, wie sich eine Fluktuation wellenförmig von einem Fahrzeug zum nächsten fortsetzt. Dabei bleiben die Abstände aber relativ stabil. Zu kleine und zu große Abstände werden ausgeglichen.

In der nachfolgenden Abbildung sind die Abstände zwischen den Fahrzeugen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dargestellt.

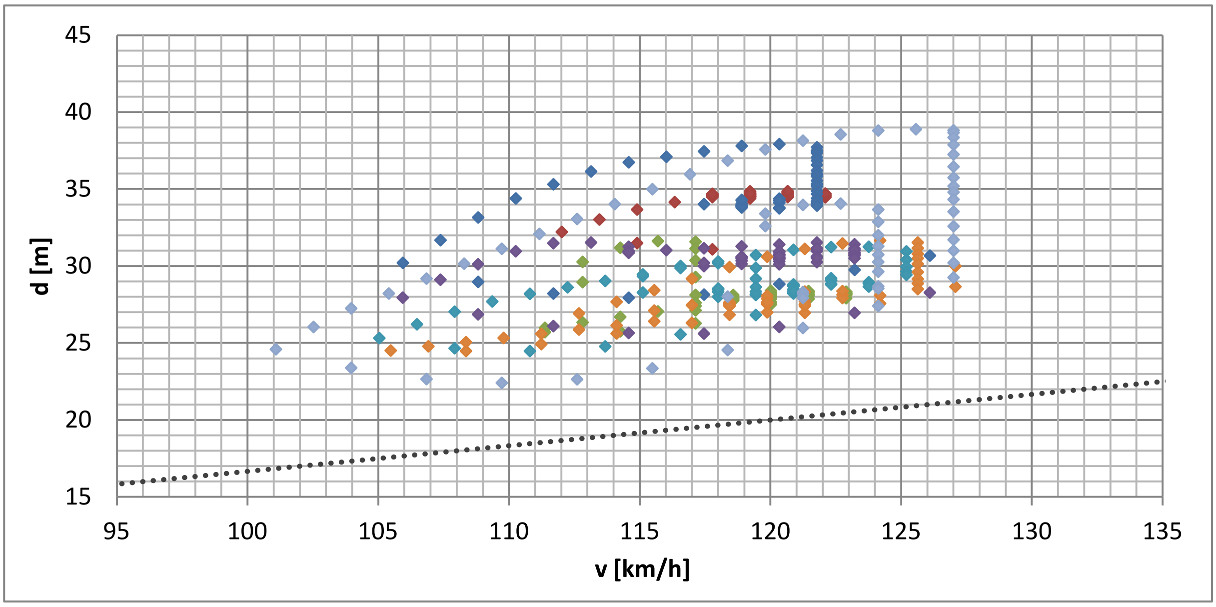

Abb. 20a: Abstände zwischen den Fahrzeugen in Szenario 5A

Man sieht, dass der Minimalabstand nach der Regel „km/h durch 6“ (punktierte Linie) nicht verletzt wird. Die Auswertung diverser Simulationsläufe mit den gleichen Parametern, aber unterschiedlichen Zufallszahlen bestätigt dieses Ergebnis mit ganz wenigen Ausnahmen.

Eine wichtige Voraussetzung für die Stabilität ist, dass schnell auf Abstandsveränderungen reagiert wird. Im obigen Szenario ist die Verzögerung nur durch den Zeitschritt Δt = 0,4 s gegeben.

Szenario 5B: Verzögerte Reaktion

Eine größere Verzögerung der Reaktion auf Abstandsveränderungen kann simuliert werden, indem nicht der vorherige Zeitschritt ausgewertet wird sondern der davor. Die Verzögerung ist dann 2Δt = 0,8 s. Ansonsten sind alle Parameter die gleichen wie in Szenario 5A.

Die nachfolgende Abbildung zeigt wieder die Positionen der Fahrzeuge relativ zum ersten. Ein direkter Vergleich mit Abb. 20 ist allerdings nicht möglich, da den beiden Szenarien unterschiedliche Sequenzen von Zufallszahlen zugrunde liegen.

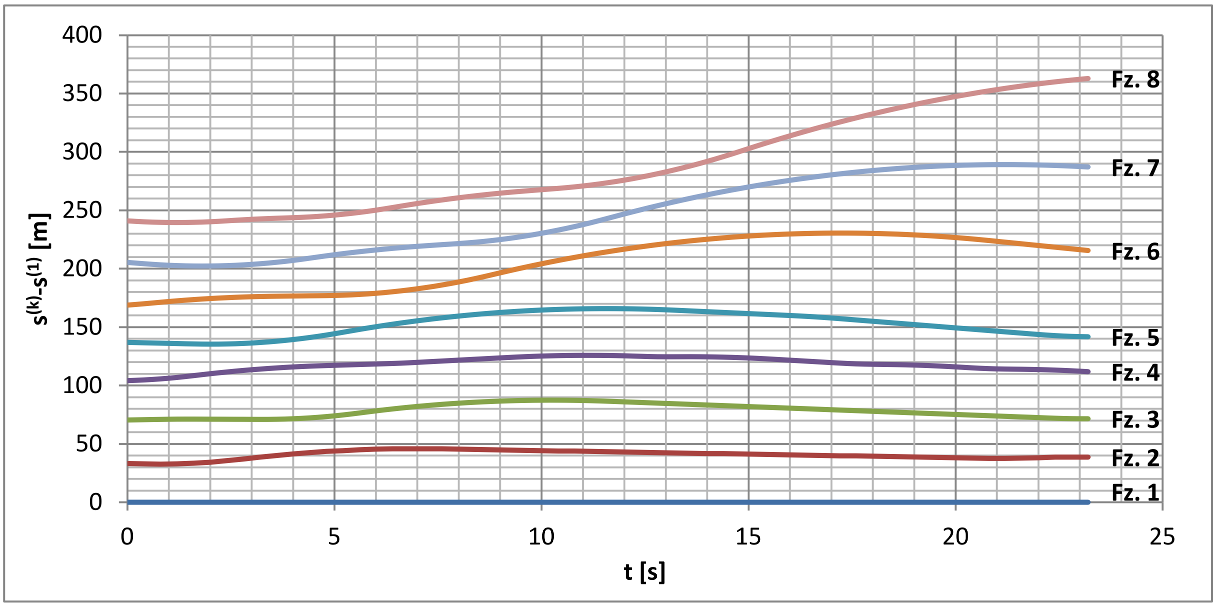

Abb. 21: Positionen relativ zum ersten Fahrzeug in Szenario 5B

Die Abbildung zeigt, dass in diesem Szenario die anfänglich geringen Fluktuationen von Fahrzeug zu Fahrzeug anwachsen. Gleichzeitig nehmen die Geschwindigkeitsschwankungen zu. In vielen Simulationsläufen wird dadurch der Minimalabstand nach der Regel „km/h durch 6“ unterschritten. Dies ist in der nachfolgenden Abbildung zu sehen, in der wieder die Abstände zwischen den Fahrzeugen in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit dargestellt sind.

Fahrzeug 5 kommt Fahrzeug 4 sehr nahe und bremst deshalb ab.[7] Deshalb müssen auch die nachfolgenden Fahrzeuge stark abbremsen, Fahrzeug 8 bis auf 78 km/h. Beim nachfolgenden Beschleunigen wachsen die Lücken zwischen den Fahrzeugen teilweise auf über 70 m an. Dieser Effekt ist bekannt als **Ziehharmonikaeffekt**, der zu anlasslosen Staus führen kann.

[7] Der Abstand zwischen Fz. 4 und Fz. 5 ist in Abb. 21a violett dargestellt und fällt zeitweise unter den Minimalabstand nach der Regel „km/h durch 6“ (punktierte Linie).

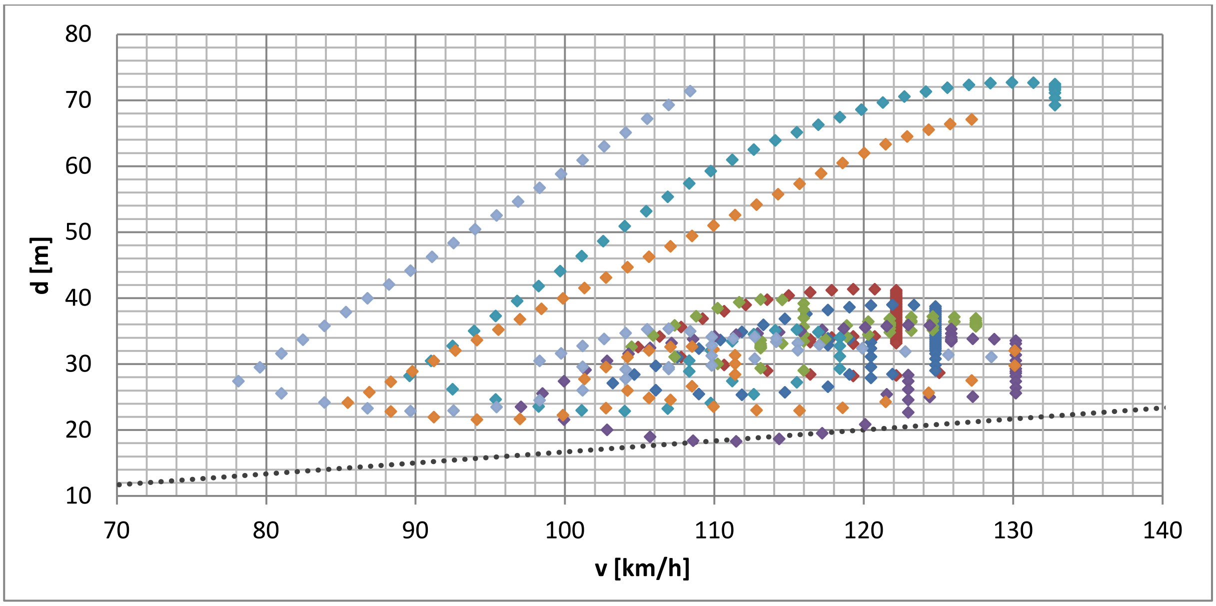

Abb. 21a: Abstände zwischen den Fahrzeugen in Szenario 5B

Im Folgenden untersuchen wir den Einfluss der verschiedenen Parameter.

Szenario 5C: Größere Abstände und Beschleunigungen

In diesem Szenario wird der Referenzabstand auf d_0 = 40 m vergrößert und die Beschleunigungen auf a_- = 3 m/s² und a_+ = 2 m/s² erhöht, um Abstandsveränderungen schneller ausgleichen zu können. Die anderen Parameter bleiben unverändert. Die nachfolgende Abbildung zeigt das Ergebnis.

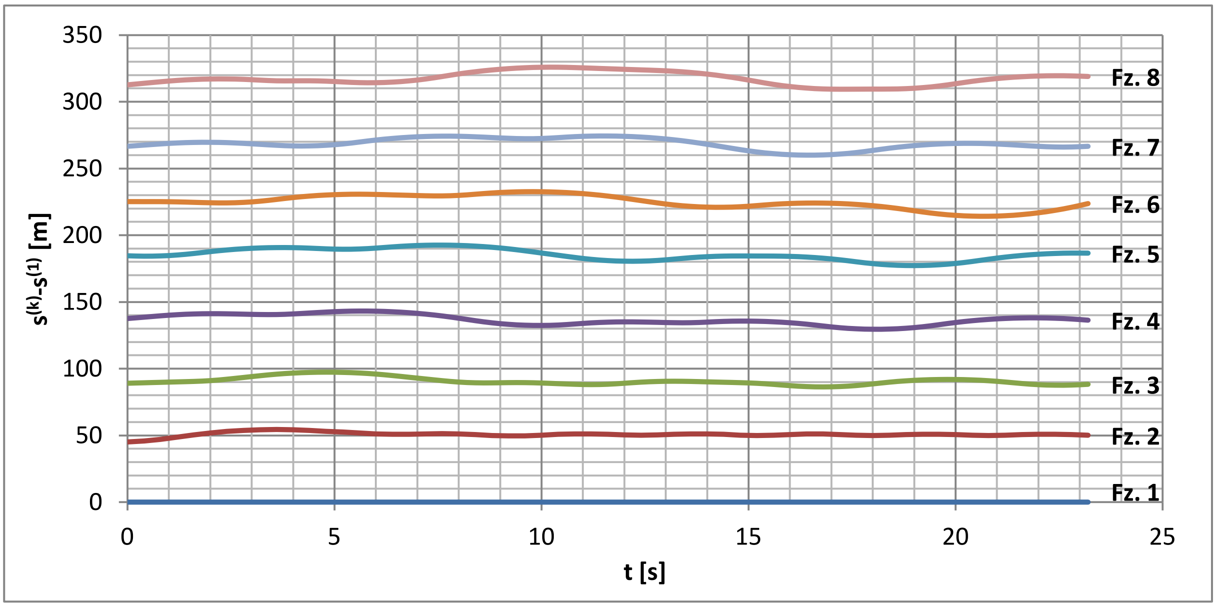

Abb. 22: Positionen relativ zum ersten Fahrzeug in Szenario 5C

Auch hier gilt allerdings wieder, dass ein direkter Vergleich mit Abb. 21 nicht möglich ist, da den beiden Szenarien unterschiedliche Sequenzen von Zufallszahlen zugrunde liegen.

Grundsätzlich kann man aber sagen, dass diese Parameterwahl das „Aufschaukeln“ von Fluktuationen und die daraus resultierenden Geschwindigkeits- und Abstandsschwankungen weitgehend verhindert, was auch die nachfolgende Abbildung zeigt und durch diverse Simulationsläufe mit ganz wenigen Ausnahmen bestätigt wird.

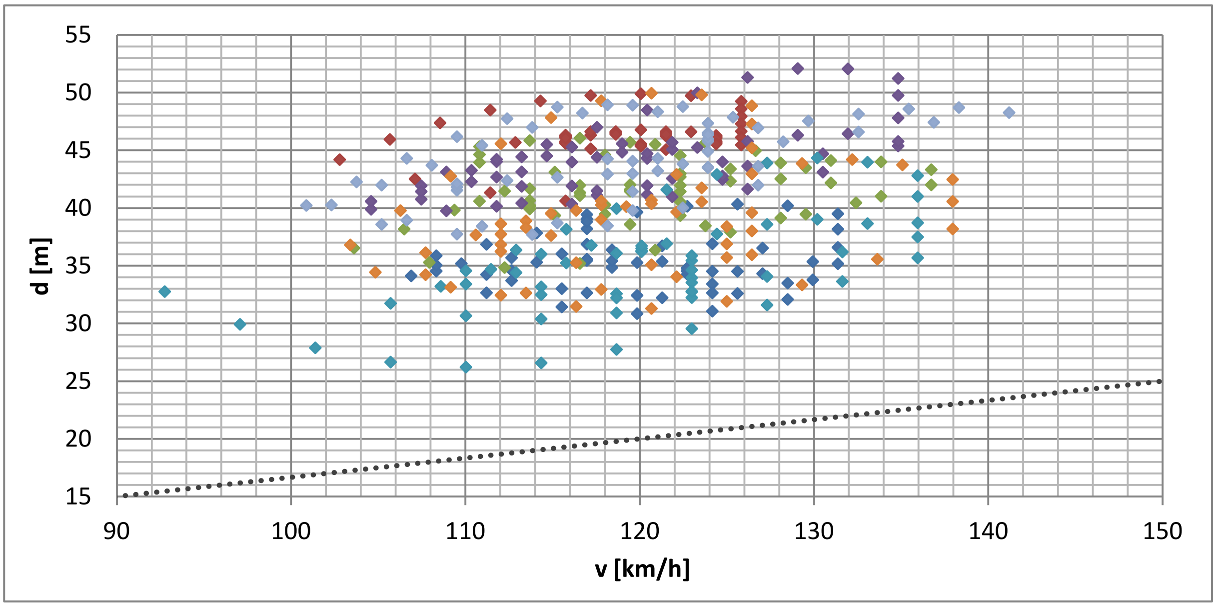

Abb. 22a: Abstände zwischen den Fahrzeugen in Szenario 5C

Allgemein gilt bei der Kolonnenfahrt, dass es entscheidend ist, die im Abschnitt Bremsvorgänge festgestellten Grundregeln zu beachten:

- Den Abstand an die Reaktionszeit und die momentane Geschwindigkeit anpassen, also nicht zu klein, aber auch nicht zu groß werden lassen.

In der Praxis kann dazu natürlich die Beschleunigung bzw. Verzögerung feiner dosiert werden als in diesen Simulationen, in denen nur die Werte a_+, 0 und $-a_-$ vorgesehen sind.

Anhang

Die Berechnung der zum Überholen notwendigen freien Strecke S_F in Szenario 3C kann analytisch wie folgt durchgeführt werden:

Bei t = 0 befindet sich Fahrzeug 1 in der Position $s_1 = 0$ und Fahrzeug 2 aufgrund des Mindestabstands $d_0 = v_0T_R$ in der Position $s_2 = - v_0T_R - L$.

Die Position von Fahrzeug 1 zu einer beliebigen Zeit t ist $s_1(t) = v_0t$.

Der Beschleunigungsvorgang von Fahrzeug 2 von v_0 auf v_{max} dauert $T_B = (v_{max}-v_0)/a_2$. In dieser Zeit legt Fahrzeug 2 die Strecke $v_0T_B + ½a_2T_B^2$ zurück.

Die Position von Fahrzeug 2 zu einer beliebigen Zeit $t > T_B$ ist folglich:

$$s_2(t) = - v_0T_R - L + v_0T_B + ½a_2T_B^2 + v_{max}(t-T_B)$$

Der Mindestabstand zum Wiedereinscheren von Fahrzeug 2, nachdem es Fahrzeug 1 überholt hat, ist nach der Formel auf Seite 11:

$$d_E = \max\left(0; v_0T_R - ½(v_E^2-v_0^2)/a_0\right)$$

Dabei ist v_E die Geschwindigkeit von Fahrzeug 2 am Ende des Überholvorgangs. Zu diesem Zeitpunkt T_E kann die Geschwindigkeit noch kleiner als v_{max} sein. a_0 entspricht einer Vollbremsung und wird hier mit 8 m/s² angesetzt. Alternativ könnte man auch, ohne die Geschwindigkeitsdifferenz zu berücksichtigen, $d_E = v_0T_R$ verwenden.

Der Überholvorgang kann als beendet betrachtet werden, wenn gilt:

$$s_2(T_E) = s_1(T_E) + d_E + L$$

Eingesetzt ergibt das:

$$- v_0T_R - L + v_0T_B + ½a_2T_B^2 + v_{max}(T_E-T_B) = v_0T_E + d_E + L$$

Aufgelöst nach T_E folgt

$$(v_{max}-v_0)T_E = d_E + 2L + v_0T_R + (v_{max}-v_0)T_B - ½a_2T_B^2$$

und $$T_E = T_B + \left(d_E + 2L + v_0T_R - ½a_2T_B^2\right)/(v_{max}-v_0)$$

sowie $$T_E = ½(v_{max}-v_0)/a_2 + \left(d_E + 2L + v_0T_R\right)/(v_{max}-v_0)$$

Bei großen Geschwindigkeitsunterschieden ist $d_E = 0$, womit folgt:

$$T_E = ½(v_{max}-v_0)/a_2 + (2L+v_0T_R)/(v_{max}-v_0)$$

Setzt man alternativ $d_E = v_0T_R$ an, so gilt:

$$T_E = \frac{1}{2}(v_{max}-v_0)/a_2 + 2(L+v_0T_R)/(v_{max}-v_0)$$

Die von Fahrzeug 2 während des Überholvorgangs zurückgelegte Strecke ist:

$$S_E = s_2(T_E) - s_2(0) = s_1(T_E) + d_E + 2L + v_0T_R = v_0(T_E+T_R) + d_E + 2L$$

Berücksichtigt man nun noch möglichen Gegenverkehr, der sich mit v_{max} nähert, so ergibt sich die zum Überholen benötigte freie Strecke zu:

$$S_F = S_E + v_{max}T_E$$

Setzt man die Parameter aus Szenario 3C ein, so ergeben sich die folgenden Werte:

$T_B = 2{,}78$ s $\quad$ $d_E = 0$ m $\quad$ $T_E = 3{,}10$ s $\quad$ $S_E = 70{,}65$ m $\quad$ $S_F = 156{,}73$ m

Diese Werte stimmen exakt mit der Simulation überein.

Mit der alternativen Abstandsformel $d_E = v_0T_R$ ergibt sich:

$T_B = 2{,}78$ s $\quad$ $d_E = 10$ m $\quad$ $T_E = 4{,}00$ s $\quad$ $S_E = 95{,}65$ m $\quad$ $S_F = 206{,}73$ m

Die „Wahrheit" liegt – wie so oft – dazwischen. $d_E = 0$ m ist zwar physikalisch korrekt, aber nicht praktikabel. $d_E = 10$ m berücksichtigt die höhere Geschwindigkeit von Fahrzeug 2 überhaupt nicht, ist also übertrieben.

Die nachfolgende Abbildung zeigt S_F in Abhängigkeit von v_0 und a_2. Die punktierten Kurven gelten für die alternative Abstandsformel.

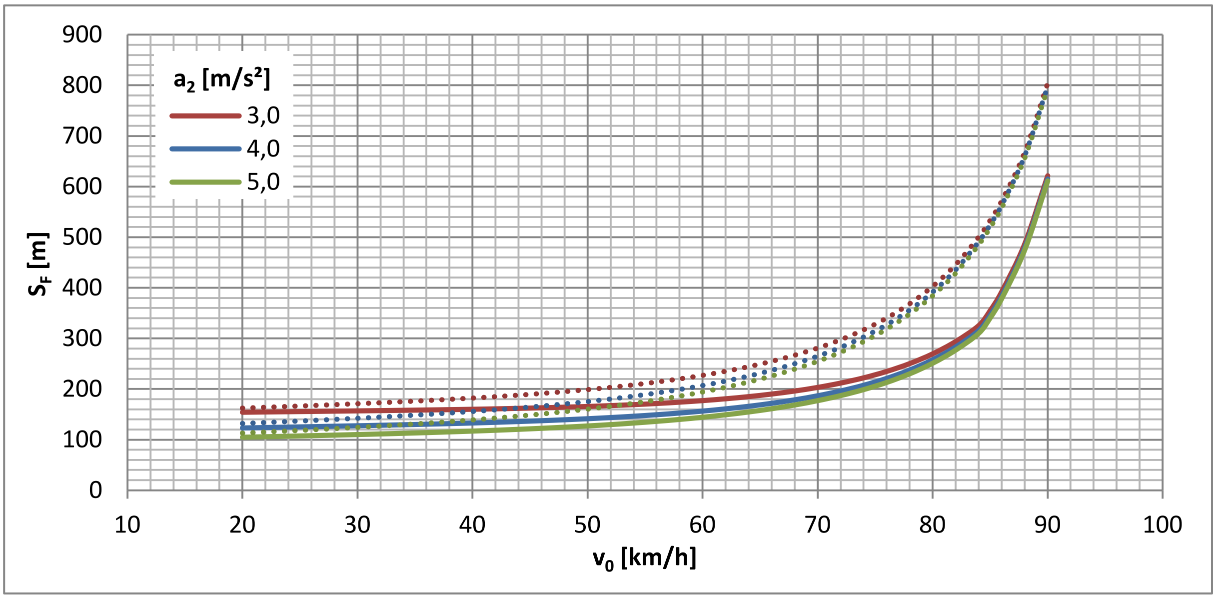

Abb. 23: Zum Überholen benötigte freie Strecke in Szenario 3C

Die geringen Unterschiede zu Abb. 17 liegen an der unterschiedlichen Anzahl von Datenpunkten, zwischen denen interpoliert wird.

Anmerkung

Bei genauer Betrachtung fällt auf, dass die Lösung wegen der Abhängigkeit von d_E von v_E und $v_E = v_0 + a_2T_E$ für $T_E < T_B$ einen potentiellen Zirkelbezug enthält. Das ist aber nur der Fall, wenn $d_E > 0$ ist, also

$$v_0T_R > ½(v_E^2-v_0^2)/a_0$$

$$v_0T_R > ½(2v_0a_2T_E+a_2^2T_E^2)/a_0$$

$$½a_2^2T_E^2 + v_0a_2T_E - a_0v_0T_R < 0$$

Die positive Lösung dieser quadratischen Gleichung in T_E ist

$$T_E < (\sqrt{(v_0^2+2a_0v_0T_R)} - v_0)/a_2$$

Andererseits ist wegen $d_E > 0$ auch

$$T_E > ½(v_{max}-v_0)/a_2 + (2L+v_0T_R)/(v_{max}-v_0)$$

Kombiniert man beide Gleichungen, erhält man

$$½(v_{max}-v_0)/a_2 + (2L+v_0T_R)/(v_{max}-v_0) < (\sqrt{(v_0^2+2a_0v_0T_R)} - v_0)/a_2$$

$$a_2 < a_{2,krit} = (\sqrt{(v_0^2+2a_0v_0T_R)} - ½(v_{max}+v_0))\ (v_{max}-v_0)/(2L+v_0T_R)$$

Im Szenario 3C liegt das Maximum von $a_{2,krit}$ mit 0,42 m/s² bei einem Wert der Ausgangsgeschwindigkeit v_0 von ca. 84,5 km/h. Ein Zirkelbezug tritt also in diesem Szenario bei realistischen Beschleunigungen nicht auf.