

# Ballistische Bahnen

Ausgehend von der einfachen [Wurfparabel](#) werden die Modelle schrittweise verfeinert.

## Parabelbahn

Berücksichtigt man lediglich die Schwerkraft, ergeben sich die folgenden Bewegungsgleichungen:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \quad \frac{dy}{dt} = v_y \quad \frac{dv_x}{dt} = 0 \quad \frac{dv_y}{dt} = -g$$

Dabei ist  $x$  die horizontale und  $y$  die vertikale Richtung und  $g = 9,80665 \text{ m/s}^2$  die Erdbeschleunigung. Daraus ergibt sich durch Integration

$$v_x = v_{x,0} \quad v_y = v_{y,0} - gt$$

und mit  $x_0 = y_0 = 0$

$$x = v_{x,0}t \quad y = v_{y,0}t - \frac{1}{2}gt^2$$

Diese Gleichungen beschreiben eine Parabelbahn:

$$y = \frac{v_{y,0}}{v_{x,0}} x - \frac{g}{2v_{x,0}^2} x^2$$

## Numerische Integration der Bewegungsgleichungen

Da wir im Folgenden komplexere ballistische Bahnen berechnen wollen, lösen wir die Bewegungsgleichungen numerisch.

### Euler-Verfahren

Beim [Euler-Verfahren](#) wird die Zeit in Zeitschritte  $\Delta t$  diskretisiert und aus den Bewegungsgleichungen wird

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = v_x \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = v_y \quad \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = 0 \quad \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = -g$$

Damit wird

$$x_{n+1} = x_n + v_{x,n}\Delta t \quad y_{n+1} = y_n + v_{y,n}\Delta t$$

und

$$v_{x,n+1} = v_{x,n} \quad v_{y,n+1} = v_{y,n} - g\Delta t$$

Dadurch, dass die Geschwindigkeit erst am Ende des Zeitschritts berechnet wird, ergibt sich ein systematischer Fehler. Um den Fehler gering zu halten, müssen sehr kleine Zeitschritte gewählt werden, was wiederum zu Rundungsfehlern führen kann.

## Leapfrog-Verfahren

Beim **Leapfrog-Verfahren** werden die Geschwindigkeiten in der Mitte des Zeitschritts berechnet. Dazu beginnt man mit einem halben Zeitschritt, allgemein, mit den Beschleunigungskomponenten  $a_x$  und  $a_y$ :

$$v_{x,1/2} = v_{x,0} + a_{x,0}\Delta t/2 \quad v_{y,1/2} = v_{y,0} + a_{y,0}\Delta t/2$$

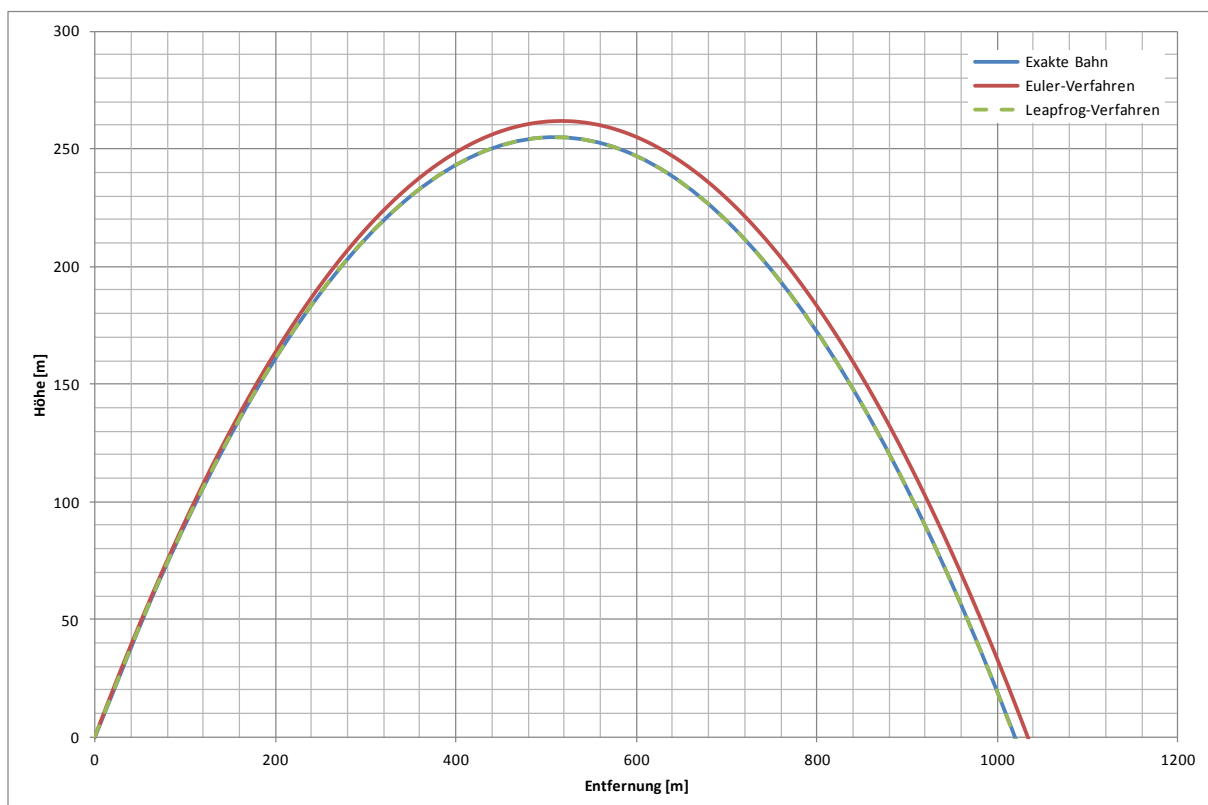
Dann wird

$$x_{n+1} = x_n + v_{x,n+1/2}\Delta t \quad y_{n+1} = y_n + v_{y,n+1/2}\Delta t$$

und <sup>1</sup>

$$v_{x,n+3/2} = v_{x,n+1/2} + a_{x,n+1/2}\Delta t \quad v_{y,n+3/2} = v_{y,n+1/2} + a_{y,n+1/2}\Delta t$$

Im konkreten Fall sind  $a_x = 0$  und  $a_y = -g$  konstant. Die nachfolgende Abbildung zeigt die Ergebnisse der exakten Berechnung und der beiden numerischen Verfahren.



**Abb. 1:** Parabelbahn mit  $v_0 = 100$  m/s in Richtung  $45^\circ$

Es zeigt sich, dass in diesem Fall das Leapfrog-Verfahren die exakte Bahn liefert, unabhängig von der Länge der Zeitschritte. Dies gilt allerdings nur für die Parabelbahn.

<sup>1</sup> Bei dieser Darstellung der Formeln wird angenommen, dass die Beschleunigung, anders als beim klassischen **Leapfrog-Verfahren**, nur von der Geschwindigkeit abhängt (siehe Abschnitt **Luftwiderstand**).

Für das Euler-Verfahren wurde ein Zeitschritt  $\Delta t = 0,2$  s gewählt, womit die Bahn in 74 Schritte unterteilt wurde. Die Abweichung von der exakten Bahn ist signifikant.

Selbst bei  $\Delta t = 0,05$  s und 290 Schritten ist noch eine Abweichung sichtbar. Die Reichweite wird dann mit 1025,25 m berechnet statt des exakten Werts von 1019,71 m und damit um 0,54 % zu groß.

## Luftwiderstand

Der **Luftwiderstand**  $F_W$  ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit  $v$ :

$$F_W = c_W A \frac{1}{2} \rho v^2$$

Dabei sind  $c_W$  der Widerstandsbeiwert,  $A$  die Querschnittsfläche und  $\rho$  die Luftdichte. Damit ergibt sich bei einer Masse  $M$  für die Verzögerung durch den Luftwiderstand

$$a_W = \frac{F_W}{M} = k_W v^2$$

mit

$$k_W = \frac{c_W A \rho}{2M}$$

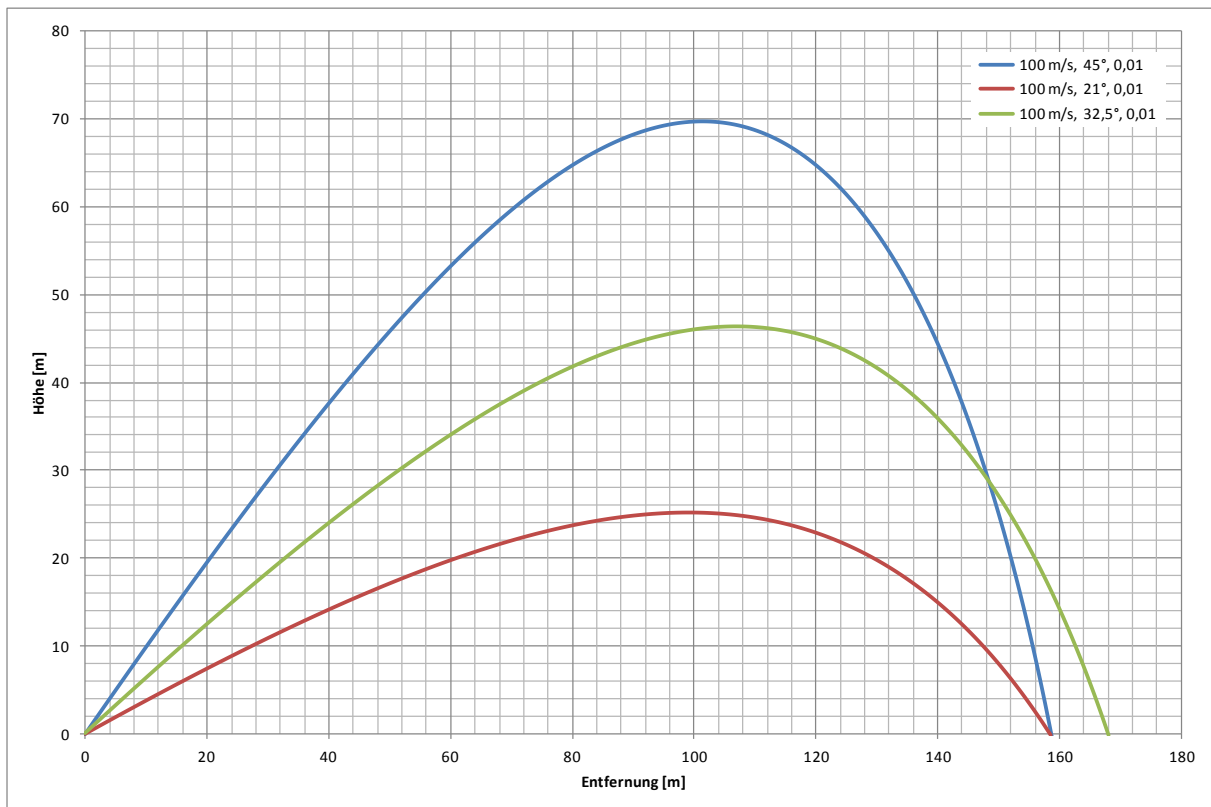
$c_W$  kann als konstant angesehen werden, solange die Geschwindigkeit sich nicht der Schallgeschwindigkeit von 343,2 m/s nähert. Im Folgenden betrachten wir  $k_W$  als Konstante.

Der Luftwiderstand wirkt in der entgegengesetzten Richtung zur Geschwindigkeit. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung der Schwerkraft

$$a_x = -a_W \cos \varphi \quad \text{und} \quad a_y = -a_W \sin \varphi - g \quad \text{mit} \quad \tan \varphi = v_y/v_x$$

Als Beispiel verwenden wir wieder eine Anfangsgeschwindigkeit von  $v_0 = 100$  m/s. Den Luftwiderstand setzen wir mit  $k_W = 0,01 \text{ m}^{-1}$  relativ hoch an, um den Effekt deutlich sichtbar zu machen.

Die Zeitschritte werden so gewählt, dass die Anzahl der Schritte bei ca. 300 oder etwas darüber liegt. Eine weitere Erhöhung der Schrittzahl bringt keine signifikante Änderung.



**Abb. 2:** Ballistische Bahnen unter Berücksichtigung des Luftwiderstands

Es ist deutlich erkennbar, dass die Bahnen nicht mehr symmetrisch zum Scheitelpunkt sind. Während ohne Luftwiderstand die maximale Reichweite bei einem Abschusswinkel  $\varphi_0 = 45^\circ$  erreicht wird, muss dieser Winkel aufgrund der durch den Luftwiderstand geänderten Bahnform kleiner sein. Im Beispiel wird die maximale Reichweite bei  $\varphi_0 = 32,5^\circ$  erreicht.

### Anmerkungen zur Drallstabilisierung

Ein Geschoss kann beim Abschuss in eine Rotationsbewegung um die Längsachse versetzt werden, die die Lage des Geschosses im Raum aufgrund der Drehimpulserhaltung stabilisiert. Durch die Krümmung der Geschossbahn aufgrund der Schwerkraft entsteht ein Anstellwinkel zwischen Geschossachse und Bewegungsrichtung. Daraus resultiert ein Auftrieb, der die Flugbahn verlängert. Da für die nachfolgenden Betrachtungen nicht relevant, gehen wir hier nicht näher auf die durchaus komplexen Details der [Geschossstabilisierung](#) ein.

### Schubphase

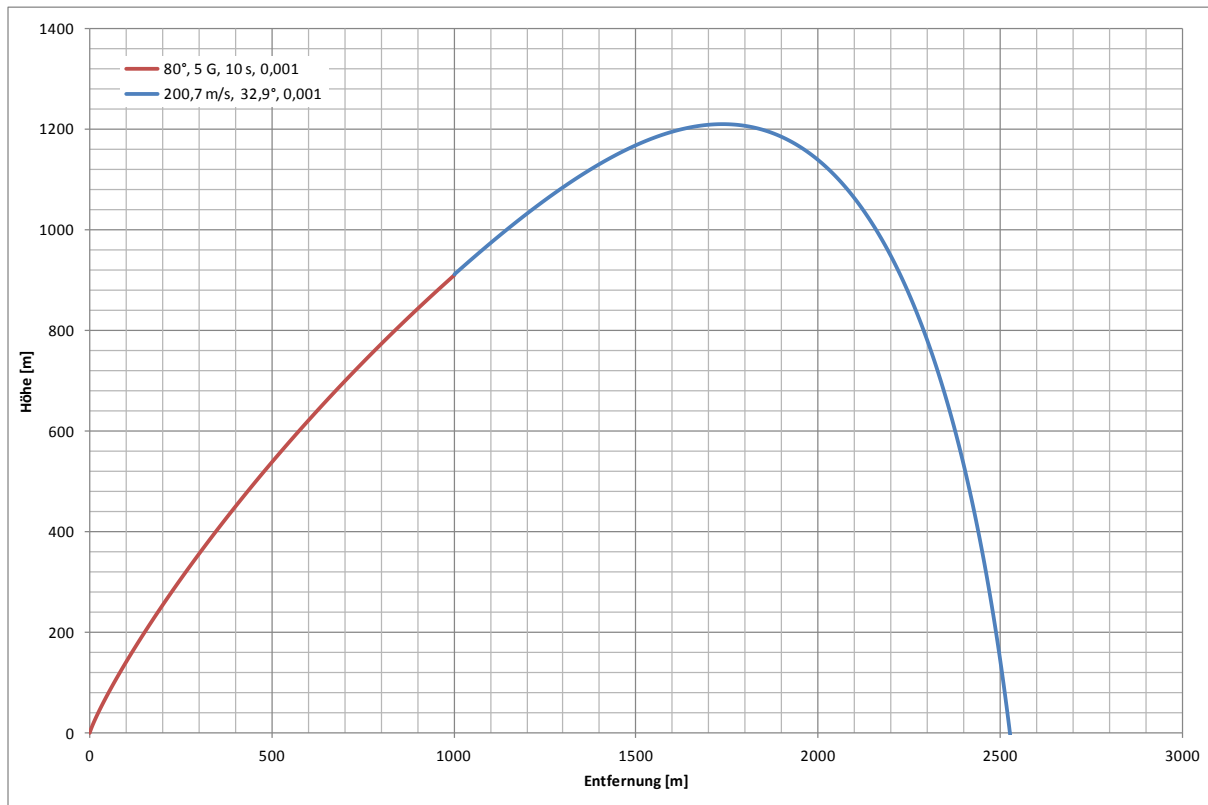
Während der vorherige Abschnitt im allgemeinen Sinn Geschossbahnen beschreibt, wollen wir uns nun mit [ballistischen Raketen](#) beschäftigen. Wir gehen von  $v_0 = 0$  aus und betrachten eine Schubphase mit konstanter Schubbeschleunigung  $a_S$ . Dabei nehmen wir an, dass  $a_S$  immer in Richtung der momentanen Geschwindigkeit wirkt. Damit ergibt sich unter Berücksichtigung des Luftwiderstands und der Schwerkraft

$$a_x = (a_S - a_W) \cos \varphi \quad \text{und} \quad a_y = (a_S - a_W) \sin \varphi - g$$

$$\text{mit } \tan \varphi = v_y/v_x$$

Im nachfolgenden Beispiel ist  $\varphi_0 = 80^\circ$ ,  $a_S = 5 \text{ G} \approx 49 \text{ m/s}^2$  und  $k_W = 0,001 \text{ m}^{-1}$ . Die Schubphase dauert 10 s (in der Abbildung rot).

Die Zeitschritte für die Schubphase werden aus deren Dauer so berechnet, dass die Schubphase in 460 Schritte untergeteilt wird. Für die Freiflugphase werden die Zeitschritte so gewählt, dass die Anzahl der Schritte bei mindestens ca. 400 liegt.



**Abb. 3:** Ballistische Bahn mit Schub- und Freiflugphase

Nach Ende der Schubphase beträgt die Geschwindigkeit 200,7 m/s mit  $\varphi = 32,9^\circ$ . In diesem Bereich kann man  $k_W$  noch als konstant ansehen. In der darauf folgenden Freiflugphase (in der Abbildung blau) wirken nur Schwerkraft und Luftwiderstand.

Auffällig ist, dass die Bahn aufgrund der anfänglich niedrigen Geschwindigkeit durch die Wirkung der Schwerkraft schnell flacher wird (sog. *Gravity Turn*).

## Treibstoffverbrauch

Bisher wurde nicht in Betracht gezogen, wie der Schub erzeugt wird. In der Praxis ist dies aber mit dem Verbrauch von Treibstoff verbunden. Dieser wiederum reduziert die Gesamtmasse. Bei konstanter Schubkraft  $F_S$  nimmt mit abnehmender Gesamtmasse  $M_G$  die Schubbeschleunigung  $a_S$  entsprechend zu

$$a_S(t) = \frac{F_S}{M_G(t)}$$

Ist  $f_T$  der Anteil des Treibstoffs an der Gesamtmasse, so gilt bis zum Brennschluss  $t_B$

$$M_G(t) = M_G(0) f_M(t) \quad \text{mit} \quad f_M(t) = 1 - f_T \frac{t}{t_B}$$

Damit ergibt sich für die Schubbeschleunigung

$$a_S(t) = \frac{a_S(0)}{f_M(t)} \quad \text{für} \quad t \leq t_B$$

und

$$a_S = \frac{a_S(0)}{1 - f_T} \quad \text{für} \quad t \geq t_B$$

Genau wie die Gesamtmasse Einfluss auf die Schubbeschleunigung hat, hat sie auch Einfluss auf die Verzögerung durch den Luftwiderstand. Der Luftwiderstand  $F_W$  ist proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit  $v$ :

$$F_W = c_W A \frac{1}{2} \rho v^2$$

Damit ergibt sich für die Verzögerung durch den Luftwiderstand bis zum Brennschluss  $t_B$ <sup>2</sup>

$$a_W(t) = \frac{F_W}{M_G(t)} = \frac{k_W v^2}{f_M(t)}$$

mit der Konstante

$$k_W = \frac{c_W A \rho}{2 M_G(0)}$$

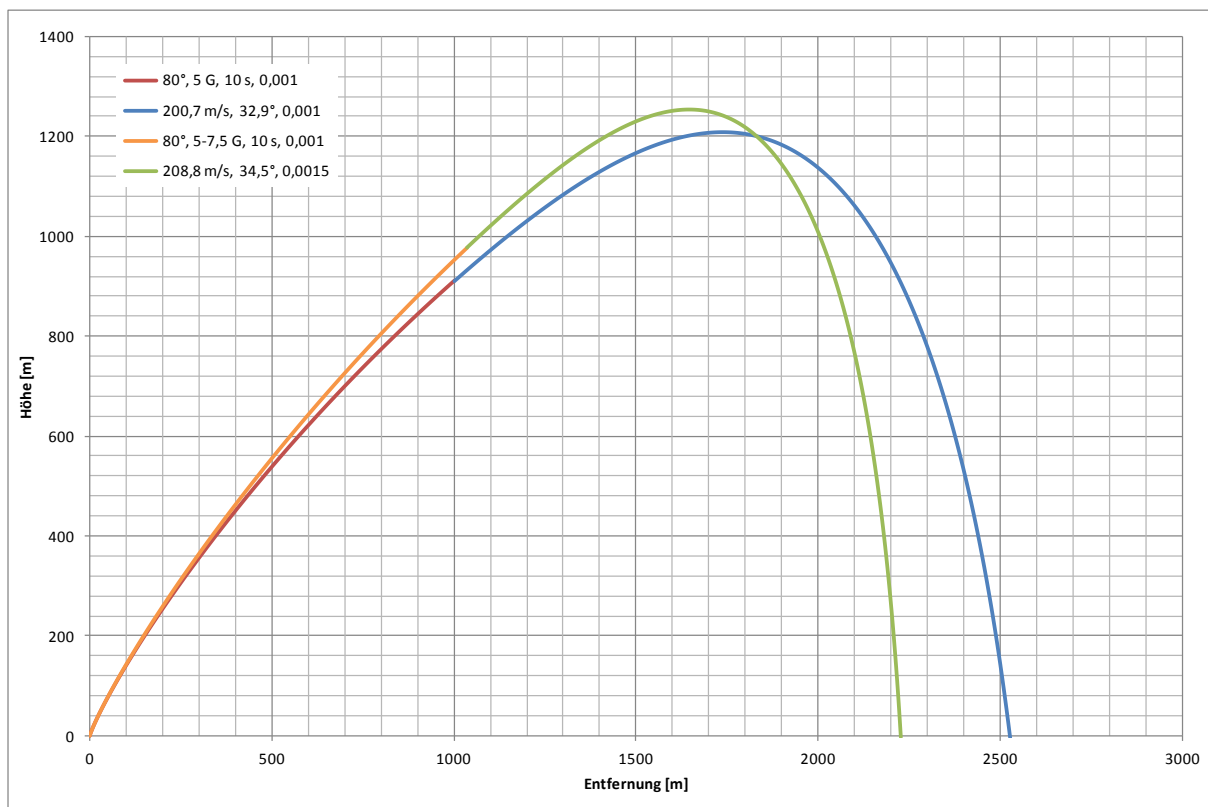
Für  $t \geq t_B$  gilt

$$a_W = \frac{k_W v^2}{1 - f_T}$$

Der Einfluss dieser Effekte wird in der nachfolgenden Abbildung veranschaulicht.

---

<sup>2</sup> Für das Leapfrog-Verfahren ergibt sich das Problem, dass die Beschleunigung jetzt nicht nur von der Geschwindigkeit sondern auch von der Zeit abhängig ist. Die orts- und zeitabhängigen Größen werden zu den vollen Zeitschritten berechnet, die geschwindigkeitsabhängigen dazwischen.  $f_M(t)$  verändert sich aber nur langsam, während die Geschwindigkeitsabhängigkeit quadratisch ist. Der Effekt ist vernachlässigbar.



**Abb. 4:** Einfluss der Massenabnahme durch Treibstoffverbrauch

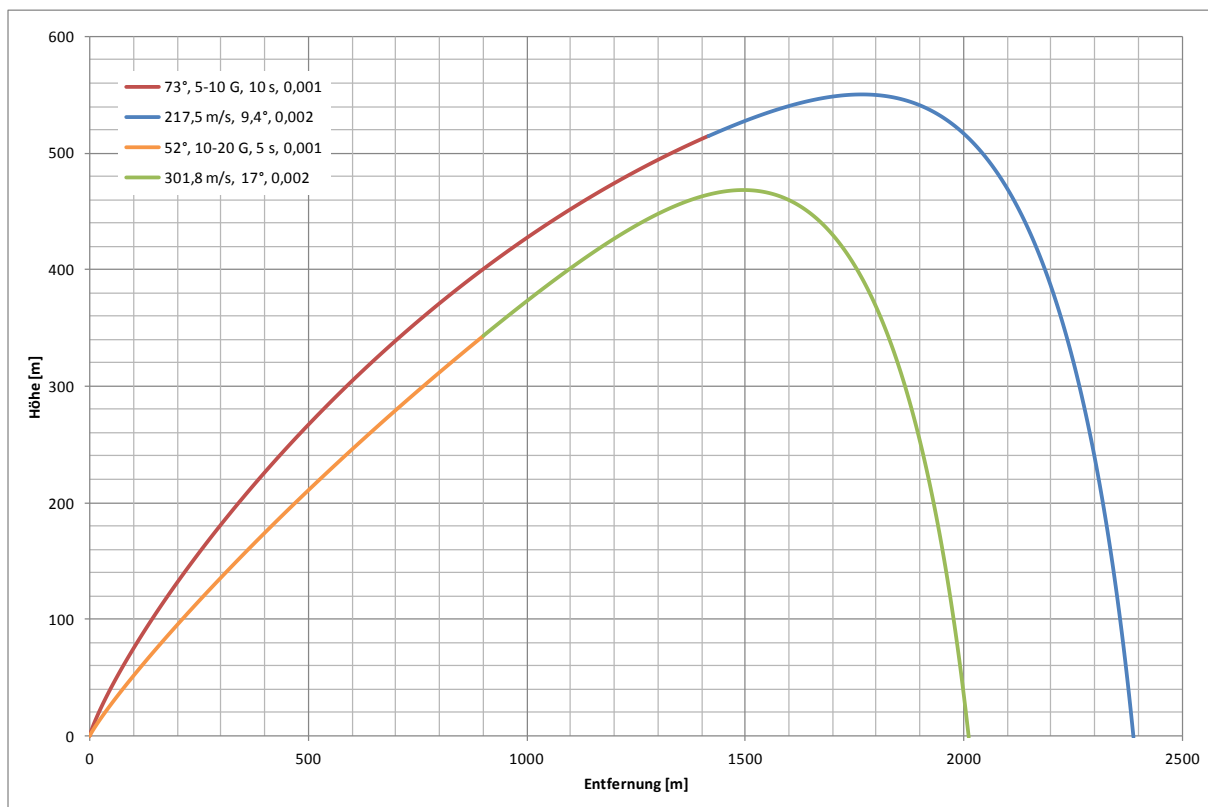
Die erste Flugbahn mit der roten Schubphase und der blauen Freiflugphase ist identisch mit Abb. 3.

Die zweite Flugbahn mit der orangen Schubphase und der grünen Freiflugphase basiert auf einem Treibstoffanteil von einem Drittel der Gesamtmasse. Die Schubbeschleunigung beträgt anfangs ebenfalls 5 G, erhöht sich aber durch den Abbau der Treibstoffmasse auf 7,5 G zum Brennschluss nach 10 s.

Obwohl bei der zweiten Flugbahn bei Brennschluss sowohl eine höhere Ausgangshöhe als auch -geschwindigkeit für die Freiflugphase erreicht wird, ist die erzielte Reichweite deutlich geringer. Das liegt daran, dass der Luftwiderstand zwar in beiden Fällen gleich ist, aber bei der zweiten Bahn auf eine geringere Masse wirkt, was zu einer höheren Verzögerung führt. Dies ist ablesbar an dem in Abb. 4 angegebenen Luftwiderstandsfaktor für die Freiflugphase  $k_W/(1 - f_T) = 0,0015$ .

### Reichweitenoptimierung

Im folgenden Beispiel vergleichen wir zwei Fälle mit gleichen Massenverhältnissen. In beiden Fällen beträgt der Treibstoffanteil 50 %. Der Unterschied liegt in der Nutzung des Treibstoffs. Im ersten Fall (rote Schubphase) beträgt die Schubbeschleunigung 5 - 10 G über 10 s, im zweiten Fall (orange Schubphase) beträgt sie 10 - 20 G über 5 s.



**Abb. 5:** Vergleich unterschiedlicher Schubphasen bei gleichen Massenverhältnissen

Die Abbildung zeigt im ersten Fall eine deutlich größere Reichweite, obwohl in beiden Fällen der Winkel  $\varphi_0$  für die maximale Reichweite optimiert wurde. Im Ergebnis ist also ein geringerer Schub über eine längere Zeit effizienter als ein größerer Schub über eine entsprechend kürzere Zeit. Das liegt daran, dass die Geschwindigkeit und damit der Luftwiderstand im zweiten Fall höher ist.

## Luftdichte

Die Luftdichte nimmt mit der Höhe ab. Näherungsweise kann dies auf der Grundlage der [barometrischen Höhenformel](#) beschrieben werden:

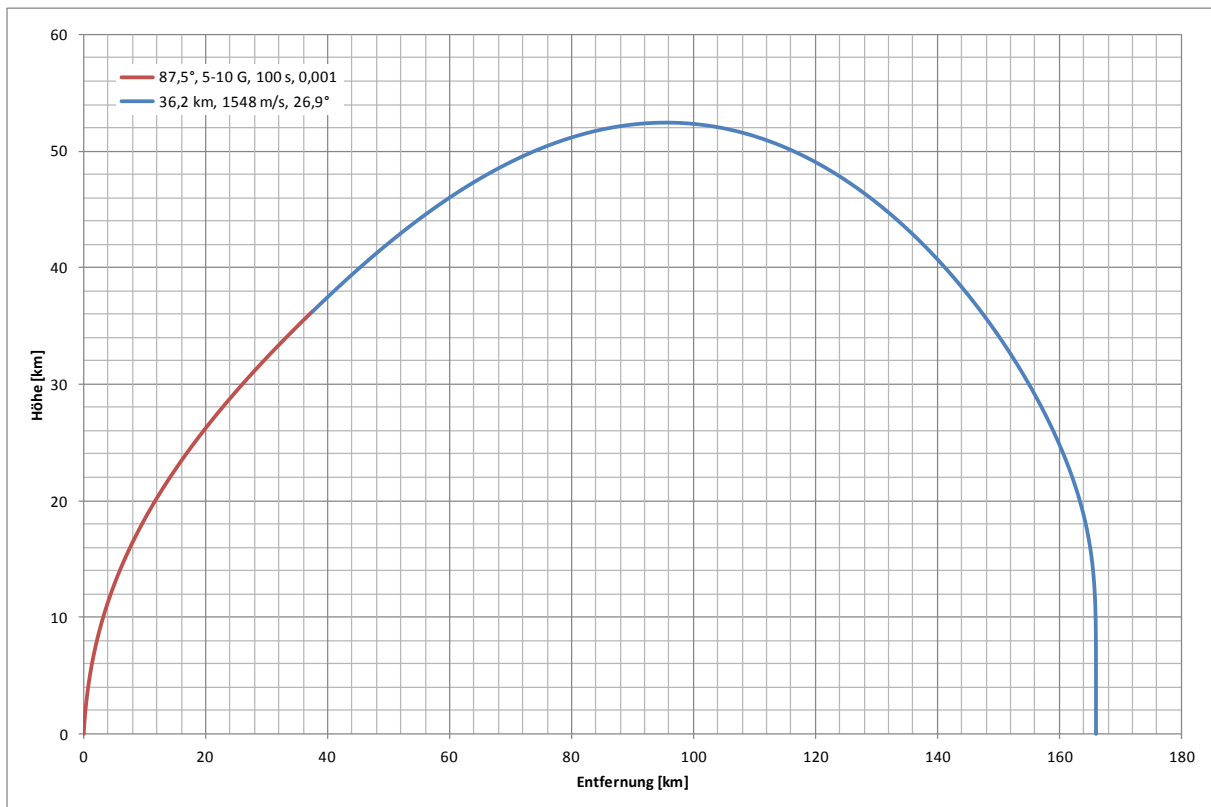
$$\rho(h) = \rho_0 e^{-h/h_s}$$

Dabei ist  $\rho_0$  die Luftdichte auf Meereshöhe und  $h_s \approx 7,8$  km die [Skalenhöhe](#) der Erdatmosphäre. Diese Näherung gilt für Höhen bis ca. 100 km.

Im folgenden Beispiel beträgt der Treibstoffanteil 50 % und die Schubbeschleunigung anfänglich 5 G. Die Schubphase ist auf 100 s verlängert und der Winkel  $\varphi_0$  auf  $87,5^\circ$  erhöht. Dadurch werden sehr schnell Höhen erreicht, in denen die Luftdichte und damit der Luftwiderstand signifikant abnimmt.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> Die Beschleunigung hängt jetzt nicht nur von der Geschwindigkeit und ggf. der Zeit ab, sondern auch vom Ort, was beim klassischen [Leapfrog-Verfahren](#) die einzige Abhängigkeit ist. Diese Abhängigkeit stellt deshalb kein Problem dar, zumal die Veränderung pro Zeitschritt sehr gering ist.





**Abb. 6:** Berücksichtigung der barometrischen Höhenformel

Bei Brennschluss ist eine Höhe von 36,2 km erreicht. Dort beträgt nach der barometrischen Höhenformel die Luftdichte nur noch ca. 1 % der Dichte auf Meereshöhe. Entsprechend gering ist trotz der hohen Geschwindigkeit von 1548 m/s der Luftwiderstand. Der Einfluss der Geschwindigkeit und der Atmosphäreneigenschaften in Abhängigkeit von der Höhe auf den  $c_W$ -Wert ist in diesem Modell nicht berücksichtigt.

Die Freiflugphase dauert in diesem Beispiel ca. 5 Minuten. Dabei wird eine Scheitelhöhe von 52,4 km erreicht. Hier beträgt die Geschwindigkeit ca. 950 m/s. In diesem Bereich liegt annähernd eine Parabelbahn vor. Beim Wiedereintritt in dichtere Atmosphärenschichten nimmt die Geschwindigkeit dann schnell ab, bis auf ca. 70 m/s beim Aufschlag. Ab einer Höhe von ca. 10 km liegt ein quasi senkrechter Fall vor.

### Grenzgeschwindigkeit

Die Geschwindigkeit nimmt so lange ab, bis Schwerkraft und Luftwiderstand im Gleichgewicht sind. Dann gilt

$$g = a_W = \frac{k_W}{1 - f_T} v^2$$

und damit

$$v_G = \sqrt{\frac{(1 - f_T) g}{k_w}}$$

Für die im Beispiel verwendeten Parameter  $f_T = 0,5$  und  $k_w = 0,001 \text{ m}^{-1}$  ist die Grenzwinkelgeschwindigkeit  $v_G = 70,0 \text{ m/s}$  ( $\approx 250 \text{ km/h}$ ) in Übereinstimmung mit dem oben genannten Ergebnis.

## Schubreduzierung

Den Effekt, dass mit abnehmender Gesamtmasse die Schubbeschleunigung steigt, kann man durch eine Reduzierung des Schubs verhindern. Wenn man Effekte des Luftdrucks auf den Schub vernachlässigt, kann man annehmen, dass die Schubkraft  $F_S$  proportional zum Treibstoffdurchfluss  $\Phi_T$  ist. Soll die Schubbeschleunigung  $a_S$  konstant sein, gilt wegen

$$F_S(t) = M_G(t) a_S \sim \Phi_T(t) = -\frac{dM_T(t)}{dt} = -\frac{dM_G(t)}{dt}$$

$$\frac{dM_G(t)}{dt} = -\frac{M_G(t)}{\tau}$$

mit einer Konstante  $\tau$ , die noch zu bestimmen ist. Die Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$M_G(t) = M_G(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Wegen

$$M_G(t_B) = M_G(0) e^{-\frac{t_B}{\tau}} = M_G(0) - M_T(0) = M_G(0) (1 - f_T)$$

gilt

$$\tau = -\frac{t_B}{\ln(1 - f_T)}$$

Aufgrund des reduzierten Treibstoffdurchflusses

$$\Phi_T(t) = \frac{M_G(t)}{\tau} = \frac{M_G(0)}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = \Phi_T(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

verlängert sich die Brenndauer  $t_B$ . Diese ergibt sich aus der verfügbaren Treibstoffmenge

$$M_T(0) = \int_0^{t_B} \Phi_T(t) dt = \Phi_T(0) \int_0^{t_B} e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \Phi_T(0) \tau \left(1 - e^{-\frac{t_B}{\tau}}\right)$$

$$= \Phi_T(0) \tau f_T = \Phi_T(0) t_B \frac{f_T}{-\ln(1 - f_T)}$$

Ohne Schubreduzierung gilt  $\Phi_T(t) = \Phi_T(0)$  und  $M_T(0) = \Phi_T(0) t_{B'}$ . Es gilt also

$$t_{B'} = t_B \frac{f_T}{-\ln(1 - f_T)}$$

bzw.

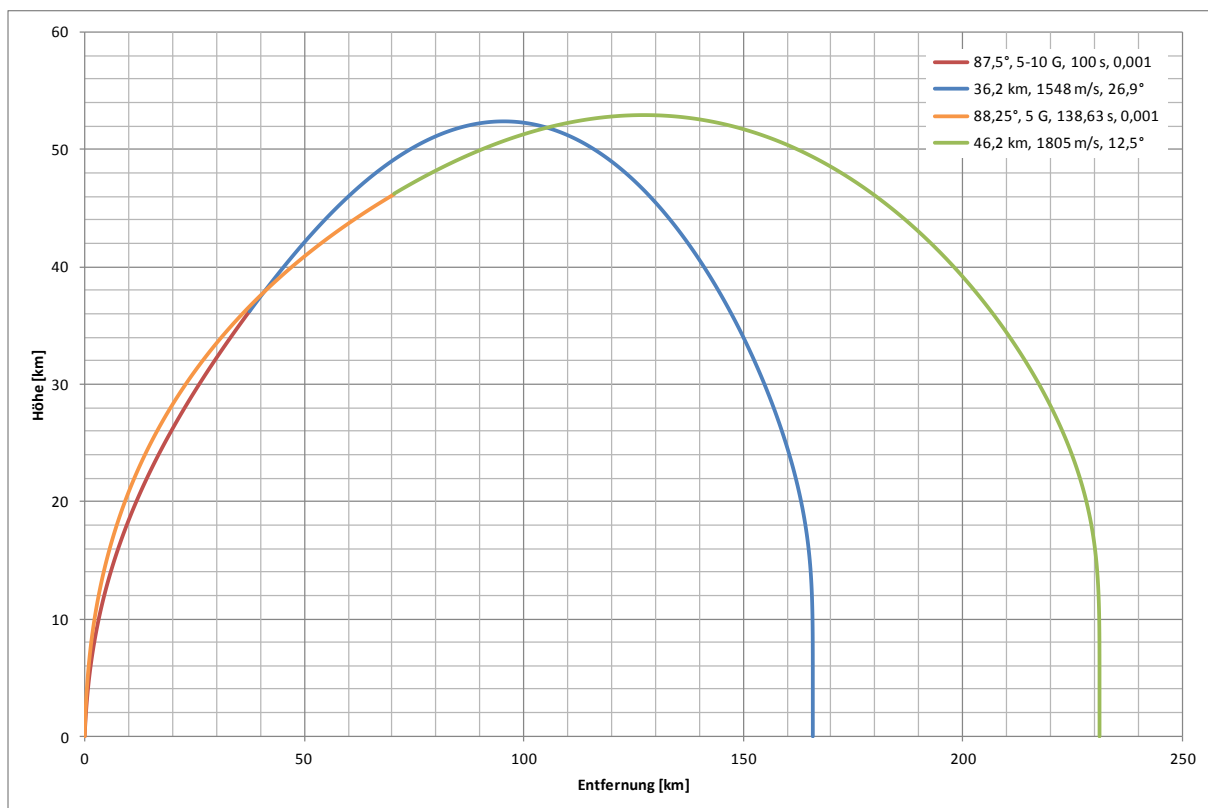
$$t_B = \frac{-\ln(1 - f_T)}{f_T} t_{B'}$$

Die nachfolgende Tabelle gibt für einige Werte von  $f_T$  die Brenndauerverlängerung  $f_B = t_B/t_{B'}$ , an:

$f_T$	0,2500	0,3333	0,5000	0,6667	0,7500
$f_B$	1,1507	1,2164	1,3863	1,6480	1,8484

Als Beispiel betrachten wir den Fall aus Abb. 6 mit einer konstanten Schubbeschleunigung von 5 G. Da  $f_T = 0,5$  ist, beträgt die Brenndauer nun 138,63 s. Wegen des niedrigeren Schubs wird der Winkel  $\varphi_0$  auf 88,25° erhöht.

Die Abbildung zeigt beide Bahnen im Vergleich.



**Abb. 7:** Vergleich konstante Schubkraft vs. konstante Schubbeschleunigung

Beide Bahnen haben in etwa die gleiche Scheitelhöhe. Die Bahn mit konstanter Schubbeschleunigung (orange Schubphase) hat aber eine deutlich höhere Reichweite. Wie schon in Abb. 5 ist auch hier ein geringerer Schub über eine entsprechend längere Zeit effizienter. Außerdem werden hohe G-Belastungen vermieden.

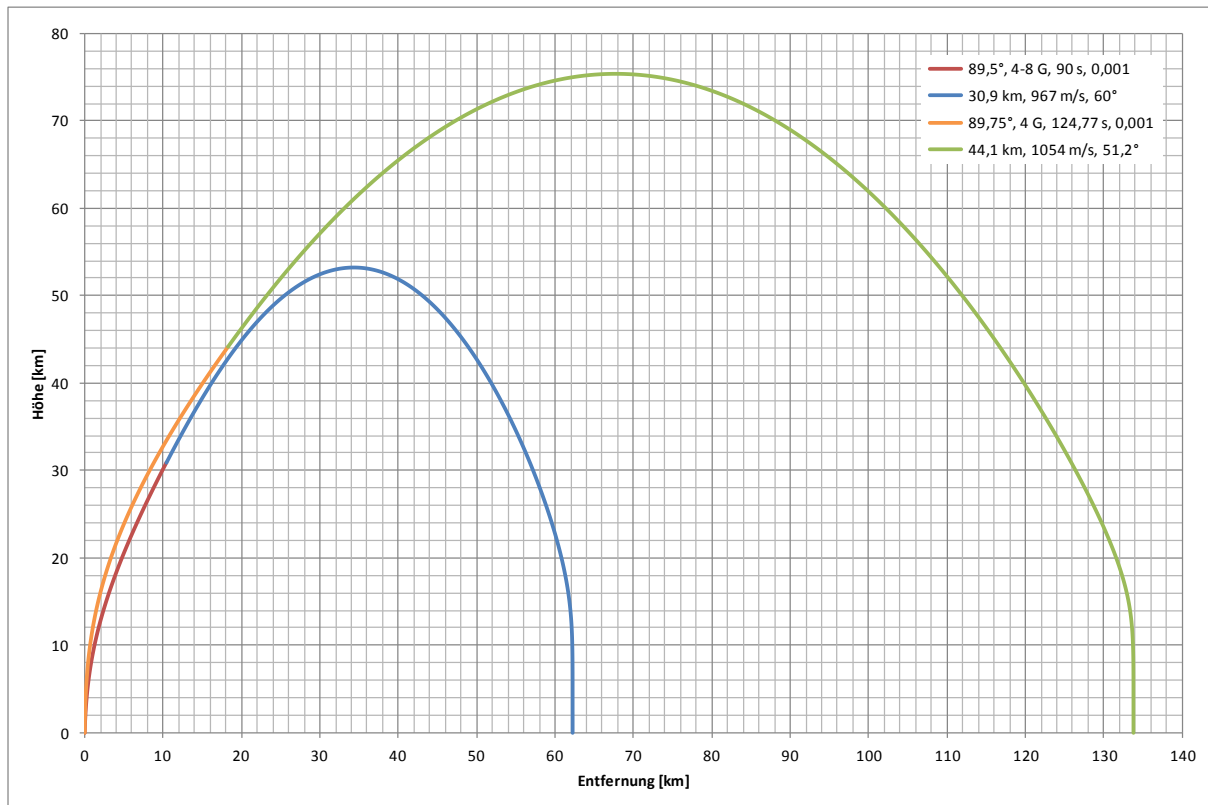
### Reichweitenoptimierung

Da in diesem Modell keine aktive Bahnsteuerung enthalten ist sondern nur der *Gravity Turn*, wird die Bahn durch den Winkel  $\varphi_0$  bestimmt. Für das folgende Beispiel wurde für beide

Fälle, d.h. konstante Schubkraft und konstante Schubbeschleunigung, jeweils der Winkel  $\varphi_0$  für die maximale Reichweite ermittelt.

Um den Bereich des Atmosphärenmodells auf Basis der barometrischen Höhenformel nicht zu verlassen, wurde die (anfängliche) Schubbeschleunigung auf 4 G und die Dauer der Schubphase auf 90 s bzw. 124,77 s reduziert.

Die nachfolgende Abbildung zeigt die auf maximale Reichweite optimierten Bahnen.



**Abb. 8:** Auf maximale Reichweite optimierte Bahnen

Bei konstanter Schubkraft und entsprechend über 90 s von 4 G auf 8 G steigender Schubbeschleunigung (rote Schubphase) wird die maximale Reichweite von 62,25 km bei  $\varphi_0 = 89,5^\circ$  erreicht.

Bei konstanter Schubbeschleunigung von 4 G über 124,77 s (orange Schubphase) wird die maximale Reichweite von 133,72 km bei  $\varphi_0 = 89,75^\circ$  erreicht.

In beiden Fällen wurde  $\varphi_0$  auf  $0,05^\circ$  genau ermittelt.

Hier zeigt sich noch einmal deutlich, dass ein geringerer Schub über eine entsprechend längere Zeit effizienter ist.

Auffällig ist allerdings, dass die Freiflugphase mit einem Winkel von deutlich über  $45^\circ$  beginnt. Aufgrund der geringen Luftdichte würde man erwarten, dass ein Winkel von  $45^\circ$  opti-

mal für die Reichweite wäre. Andererseits verringert ein steiler Aufstieg in höhere Luftschichten die Reibungsverluste.

## Optimierung des Leapfrog-Verfahrens

In den bis hier beschriebenen Beispielen wurde beim Leapfrog-Verfahren einfach über den Brennschluss hinweg gerechnet und dann beim nächsten Schritt ohne Schubbeschleunigung und mit einem anderen Zeitschritt weitergerechnet. In dem im Anhang enthaltenen verbesserten [Programmcode](#) ist der Brennschluss und der Wechsel des Zeitschritts detailliert umgesetzt.

Auf die Ergebnisse hat diese Verbesserung des Verfahrens nur geringen Einfluss. Für das Beispiel aus Abb. 8 ergeben sich folgende Abweichungen:

Bahn 1: Geschwindigkeit bei Brennschluss 964 m/s statt 967 m/s  
Reichweite 60,64 km statt 62,25 km

Bahn 2: Geschwindigkeit bei Brennschluss 1052 m/s statt 1054 m/s  
Reichweite 132,02 km statt 133,72 km

## Parameter einer realen Rakete

In den bis hier verwendeten Beispielen wurden hohe Luftwiderstände und hohe Schubbeschleunigungen angesetzt, um die Effekte deutlich sichtbar darzustellen. Wir überprüfen das relativ einfache Modell jetzt anhand der Daten einer realen Boden-Boden-Rakete, der russischen [Kurzstreckenrakete R-17](#), in der NATO als SS-1c Scud-B bezeichnet.

Diese ist etwa 11 m lang und hat einen Durchmesser von 0,88 m. Hinzu kommen vier Steuerflächen am Heck. Die Startmasse  $M_G$  beträgt ca. 5860 kg, die Treibstoffmasse  $M_T$  ca. 3770 kg. Damit ist der Treibstoffanteil  $f_T = 64,3 \%$ .

Die Schubkraft beträgt am Start 130,53 kN und im Vakuum 144,22 kN. Damit ist die Startbeschleunigung  $a_S = 22,275 \text{ m/s}^2 = 2,27 \text{ G}$ . Um den höheren Vakuumschub zu berücksichtigen, erhöhen wir den Wert auf  $a_S = 2,4 \text{ G}$ .

Der Treibstoffdurchsatz beträgt ca. 58 kg/s. Das ergibt die Brenndauer  $t_B = 65 \text{ s}$ .

Jetzt fehlt für die Modellrechnung nur noch der Luftwiderstandsfaktor

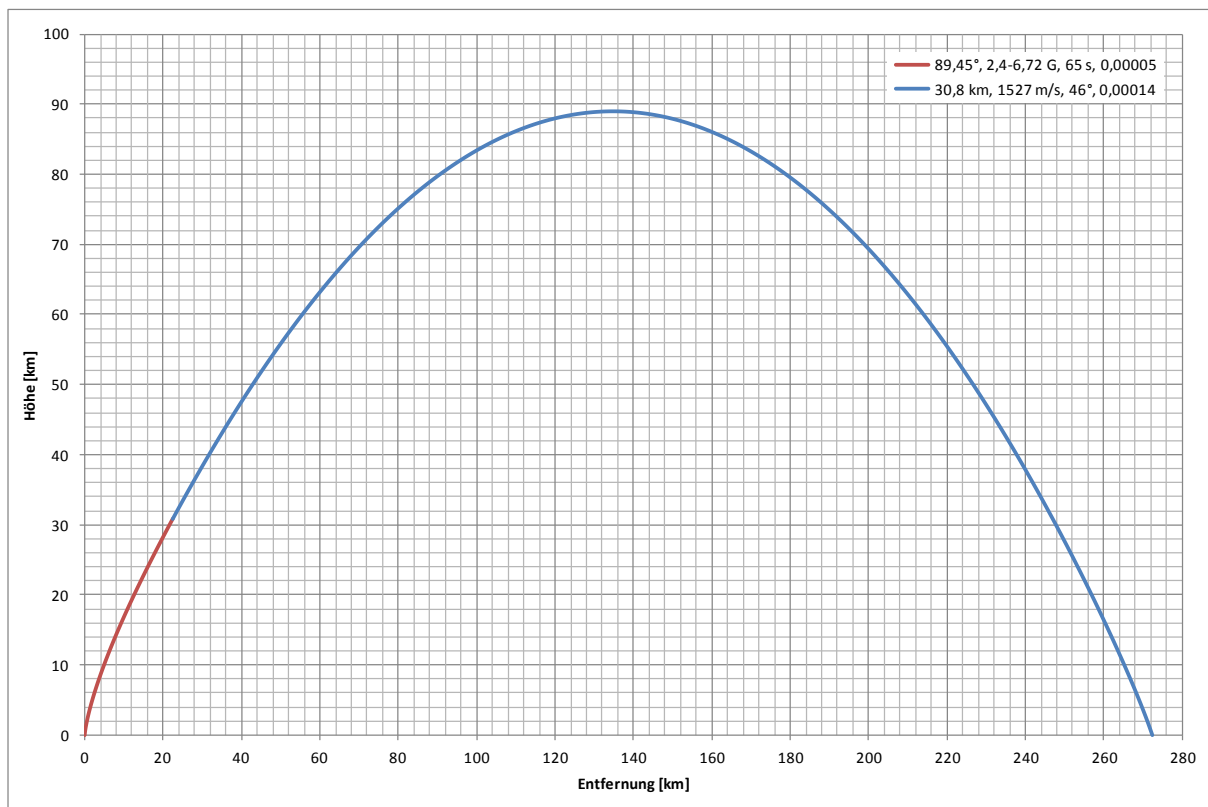
$$k_W = \frac{c_W A \rho_0}{2M_G}$$

Dabei ist  $\rho_0 = 1,225 \text{ kg/m}^3$  die Luftdichte auf Meereshöhe und  $A = 0,608 \text{ m}^2$  die Querschnittsfläche der Rakete. Damit ergibt sich

$$k_W = c_W \cdot 0,000064 \text{ m}^{-1}$$

Nun ist der  $c_W$ -Wert nicht wie im Modell angesetzt konstant, sondern hängt von der Geschwindigkeit ab. In der Nähe der Schallgeschwindigkeit steigt er auf ein Mehrfaches an und sinkt bei hohen Mach-Zahlen dann wieder auf etwa den doppelten Unterschallwert ab (vgl. Abb. 13). Zu berücksichtigen ist außerdem, dass auch die Steuerflächen einen Luftwiderstand haben. Wir rechnen deshalb mit  $k_W = 0,00005 \text{ m}^{-1}$ , d.h. einem Zwanzigstel des Werts der vorherigen Beispiele.

Damit ergibt sich die nachfolgend abgebildete Flugbahn.



**Abb. 9:** Simulation der Flugbahn einer R-17-Rakete

Der Winkel  $\varphi_0 = 89,45^\circ$  für die maximale Reichweite wurde auf  $0,01^\circ$  genau ermittelt. Die maximale Geschwindigkeit wird bei Brennschluss nach 65 s erreicht und beträgt 1527 m/s in 30,8 km Höhe. Die Freiflugphase beginnt mit  $\varphi = 46,0^\circ$ . Die Scheitelhöhe beträgt 89,0 km. Die Gesamtflugzeit beträgt 319 s und die Aufschlaggeschwindigkeit 493 m/s. Die maximale Reichweite wird mit 272,2 km berechnet.

Trotz des groben Modells stimmen diese Werte gut mit der Realität überein. Für die R-17 wird eine Höchstgeschwindigkeit von ca. 1500 m/s und eine Reichweite von 275 - 300 km angegeben. Auch die angegebene Scheitelhöhe von 86 km und die Flugzeit von 313 s werden in der Modellrechnung fast exakt erreicht.

## Schubvektorsteuerung

In der Praxis werden Raketen senkrecht gestartet und dann mittels **Schubvektorsteuerung** auf ihre Sollbahn umgelenkt. Das hat zur Folge, dass der Schubvektor nicht mehr in Richtung des Geschwindigkeitsvektors zeigt. Im zweidimensionalen Fall ist der Schubwinkel  $\vartheta \neq \varphi$ .

In diesem Fall gilt für die Beschleunigung

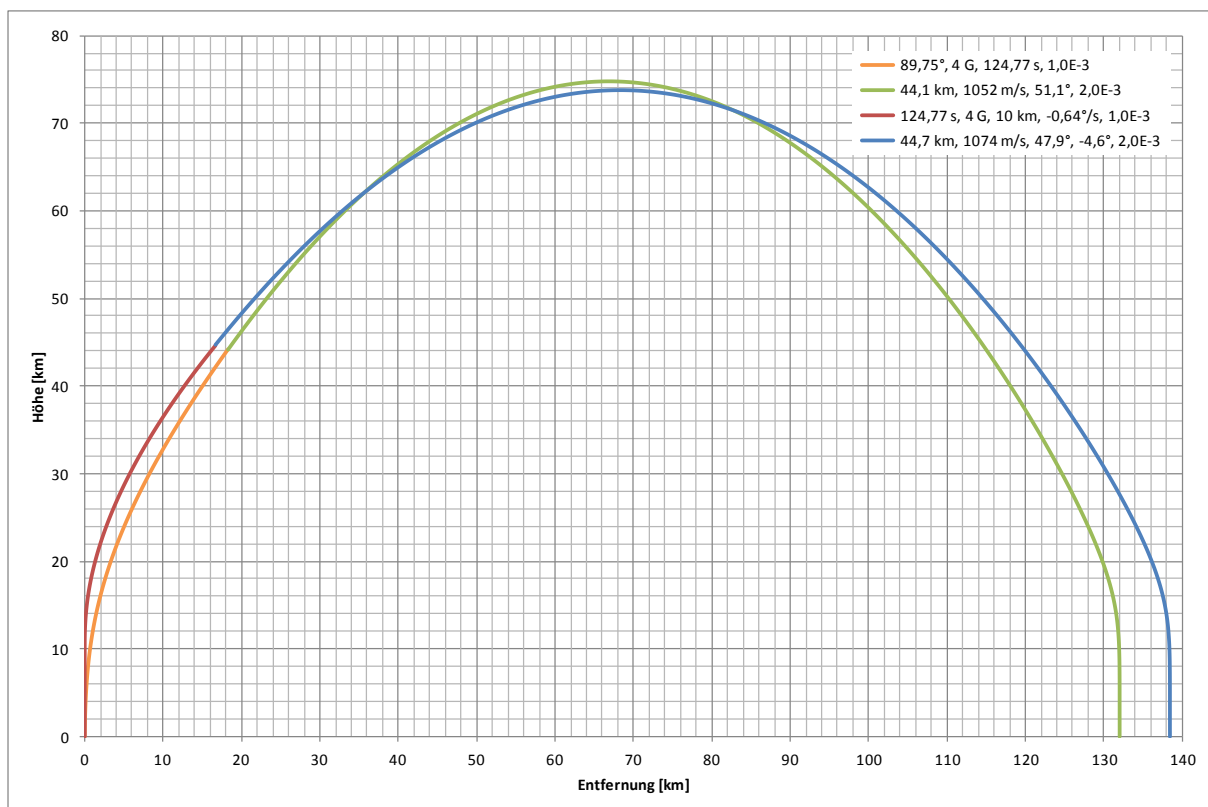
$$a_x = a_S \cos \vartheta - a_W \cos \varphi$$

und

$$a_y = a_S \sin \vartheta - a_W \sin \varphi - g$$

Im einfachsten Fall erfolgt ein senkrechter Aufstieg mit  $\vartheta = \varphi = 90^\circ$  bis zu einer Höhe  $h_1$ , und dann wird mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\dot{\vartheta}$  umgelenkt (*Constant Rate Pitch Maneuver*).

Das Ergebnis ist in der nachfolgenden Abbildung zur Verdeutlichung anhand eines Beispiels mit hohem Luftwiderstand dargestellt.



**Abb. 10:** Gravity Turn vs. Constant Rate Pitch Maneuver

Die orange-grüne Flugbahn ist (abgesehen vom optimierten Leapfrog-Verfahren) identisch mit dem *Gravity Turn* bei konstanter Schubbeschleunigung von 4 G aus Abb. 8. Die optimierte Reichweite beträgt 132,02 km.

Die rot-blaue Flugbahn beginnt mit einem senkrechten Aufstieg bis zur Höhe  $h_1 = 10$  km, gefolgt von einem *Constant Rate Pitch Maneuver* mit  $\dot{\vartheta} = -0,64^\circ/\text{s}$  bis zum Brennschluss. Die

Umlenkrate wurde auf  $0,01^\circ/\text{s}$  genau optimiert, um die maximale Reichweite von 138,39 km zu erhalten.

Die höhere Reichweite im zweiten Fall ergibt sich daraus, dass bei Brennschluss sowohl die erreichte Höhe als auch die erreichte Geschwindigkeit größer ist. Außerdem ist der Bahnwinkel  $\varphi$  zu Beginn der Freiflugphase mit  $47,9^\circ$  günstiger für den näherungsweise parabelförmigen Flug in der sehr dünnen Atmosphäre.

Am Ende der Schubphase beträgt der Anstellwinkel  $\alpha = \vartheta - \varphi = -4,6^\circ$ . Dies ist betragsmäßig auch der größte Anstellwinkel während der gesamten Schubphase (vgl. Abb. 12). Die Effekte des Anstellwinkels werden in diesem Modell aber nicht berücksichtigt. Dazu würden detaillierte Aerodynamikdaten benötigt.

### Praxisbeispiel R-17

Wegen des geringeren Luftwiderstands und der kurzen Schubphase ergibt sich die maximale Reichweite für  $h_1 = 0,01$  km und  $\dot{\vartheta} = -0,86^\circ/\text{s}$ . Die Unterschiede sind minimal:

	<i>Gravity Turn</i>	<i>Constant Rate Pitch Maneuver</i>
Bei Brennschluss:		
Höhe	30,8 km	32,0 km
Geschwindigkeit	1527 m/s	1524 m/s
Bahnwinkel	46,0°	44,7°
Im Scheitelpunkt:		
Höhe	89,0 km	87,9 km
Geschwindigkeit	1029 m/s	1054 m/s
Beim Aufschlag:		
Entfernung	272,2 km	272,0 km
Geschwindigkeit	493 m/s	488 m/s
Gesamtflugzeit	319 s	316 s

Der Anstellwinkel nimmt während der Umlenkphase kontinuierlich von  $\alpha = 0^\circ$  ab (und betragsmäßig zu) bis bei Brennschluss  $\alpha = -9,7^\circ$  ist. Dort ist die Luftdichte aber nur noch 1,7 % der Luftdichte am Boden. Die Flugbahn ist in Abb. 14 eingezeichnet (orange und grün).

### Anmerkungen zur Steuerung der R-17

Die R-17 verwendet eine Kombination aus einer Schubvektorsteuerung mittels Strahlrudern und einer aerodynamischen Steuerung mittels außen am Heck angebrachter Steuerflächen, die ähnlich wie das Leitwerk eines Flugzeugs funktionieren. Letztere arbeiten natürlich nur innerhalb der dichten Atmosphäre und werden deshalb in den hier durchgeführten Beispielrechnungen nicht betrachtet.

Von grundsätzlicher Bedeutung sind Steuerflächen am Ende der Flugbahn beim antriebslosen, atmosphärischen Anflug auf das Ziel, weil sie dann die einzige Möglichkeit bieten, die Rakete noch zu steuern.



## Randbedingungen

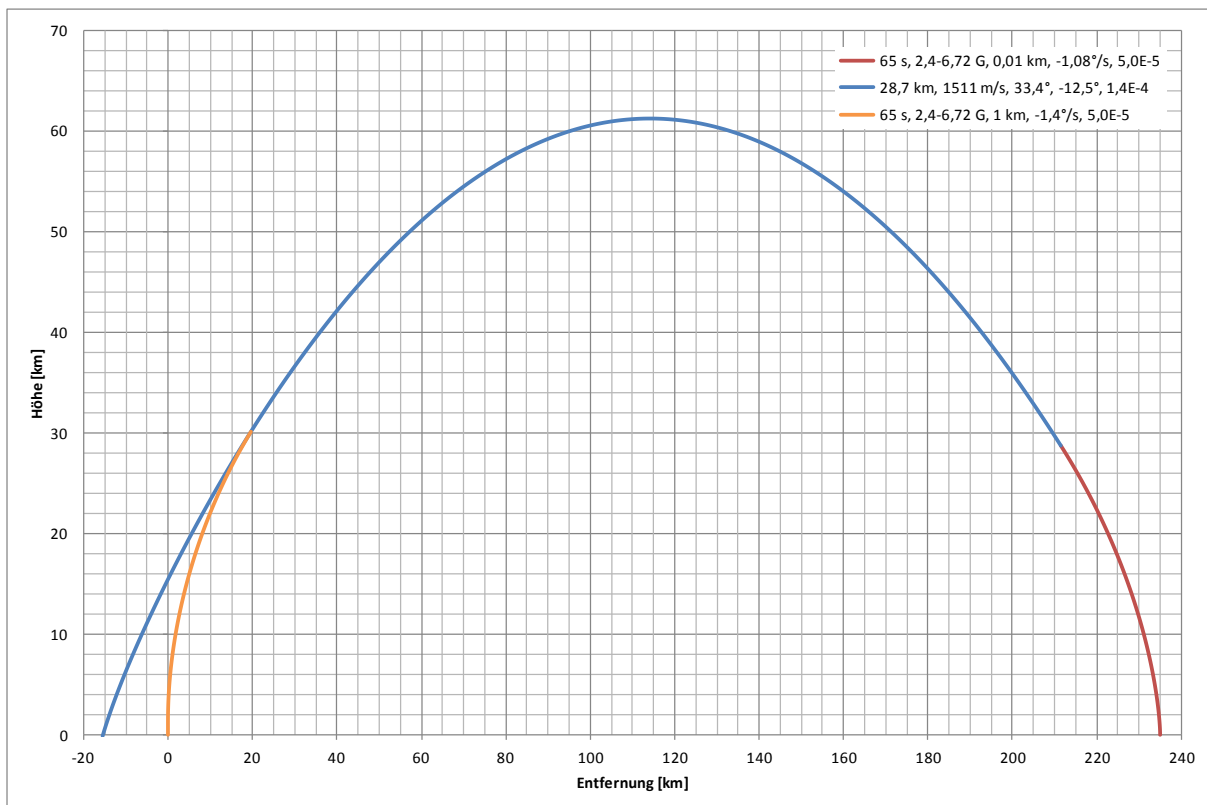
Die klassische Randbedingung ist, dass die Flugbahn in einem vorgegebenen Zielpunkt endet. Im zweidimensionalen Fall ist die Bahn so anzupassen, dass ein Ziel in einer bestimmten Entfernung getroffen wird, die kleiner als die maximale Reichweite ist. Wie aus Abb. 2 ersichtlich ist, gibt es in diesem Fall zwei Lösungen, eine höhere und eine flachere Flugbahn. Aus taktischen Gründen wird die flachere Flugbahn bevorzugt. Sie hat die kürzere Flugzeit.

Als Beispiel soll wieder die R-17 dienen. Die Zielentfernung sei 250 km. Bei einer Umlenkrate  $\dot{\vartheta} = -1,08^\circ/\text{s}$  ist die Entfernung des Einschlagpunkts  $d_E = 250,4$  km. Die Abweichung soll nicht stören, denn die R-17 hat eine Zielgenauigkeit von 500 - 800 m. Die Flugzeit Start bis Ziel beträgt 272 s. Die Flugbahn (rot und blau) ist in Abb. 11 seitenverkehrt eingezeichnet, d.h. die Flugrichtung ist von rechts nach links. Der Grund hierfür ergibt sich aus dem Folgenden.

## Abfangbahnen

Folgendes Szenario wird betrachtet: 15 km vor dem Ziel der R-17 befindet sich eine Batterie **Boden-Luft-Raketen** mit der Aufgabe, anfliegende feindliche Flugobjekte abzufangen.

In Ermangelung realer Daten benutzen wir auch für die Abfangrakete die Daten der R-17. Mit  $h_1 = 1$  km und  $\dot{\vartheta} = -1,4^\circ/\text{s}$  schwenkt die Abfangrakete kurz vor Brennschluss in ca. 30 km Höhe auf die Bahn der R-17 ein, in der nachfolgenden Abbildung dargestellt durch die orange Flugbahn (nur Schubphase).



**Abb. 11:** Abfangbahn (orange)

Die zu erfüllende Randbedingung ist hier komplexer. Zur einem bestimmten Zeitpunkt muss

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \leq d_Z$$

sein, wobei  $(x_1, y_1)$  die Koordinaten der anfliegenden Rakete sind und  $(x_2, y_2)$  die der abfangenden und  $d_Z$  der Maximalabstand für einen **Annäherungszünder** ist. In unserem Beispiel kreuzen sich die Bahnen bei

$$\begin{array}{llll} t_1 = 228,33 \text{ s} & x_1 = 17,004 \text{ km} & y_1 = 28,293 \text{ km} & \varphi_1 = 214,4^\circ \\ t_2 = 62,81 \text{ s} & x_2 = 17,005 \text{ km} & y_2 = 28,294 \text{ km} & \varphi_2 = 37,2^\circ \end{array}$$

Der Winkel zwischen den annähernd entgegengesetzten Bahnen beträgt  $2,8^\circ$ .

Die Zeitangaben beziehen sich auf den jeweiligen Startzeitpunkt. Daraus ergibt sich, dass die Abfangrakete ca. 165,5 s nach Start der R-17 gestartet werden muss. In unserem Beispiel befindet sich die R-17 dann in ca. 91 km Entfernung und 59 km Höhe, kurz nach dem Scheitelpunkt ihrer Bahn. Bis zu diesem Zeitpunkt kann die ballistische Bahn der R-17 beobachtet, ausgewertet und vorausberechnet werden, um die Abfangrakete in Richtung Abfangpunkt zu steuern.

In der Regel erfolgt bei Annäherung an das Ziel dann eine Zielerfassung und -ansteuerung durch die Rakete selbst.

## Nebenbedingungen

Im Allgemeinen ist die Steuerung dadurch eingeschränkt, dass bestimmte Nebenbedingungen eingehalten werden müssen. So kann es zum Beispiel erforderlich sein, dass der Anstellwinkel  $\alpha = \vartheta - \varphi$  begrenzt wird:

$$\alpha_{min} \leq \alpha \leq \alpha_{max}$$

Wir nehmen das Beispiel aus Abb. 10, erhöhen die Umlenkrate auf  $\dot{\vartheta} = -1^\circ/\text{s}$  und führen als zusätzliche Bedingung ein, dass der Anstellwinkel  $\alpha \geq \alpha_{min} = -3^\circ$  sein muss. Diese Bedingung gilt für die gesamte Umlenkphase (sog. *Path Constraint*). Das Ergebnis kann der unten stehenden Tabelle entnommen werden.

Nun hat die Begrenzung des Anstellwinkels in der Regel aerodynamische Gründe. Hierbei spielt aber die Luftdichte eine entscheidende Rolle. Deshalb macht es Sinn, z.B.  $\alpha_{min}$  nicht konstant zu wählen, sondern mit abnehmender Luftdichte höhere Anstellwinkel zuzulassen, so dass  $\alpha_{min}$  von der Höhe  $h$  abhängt:

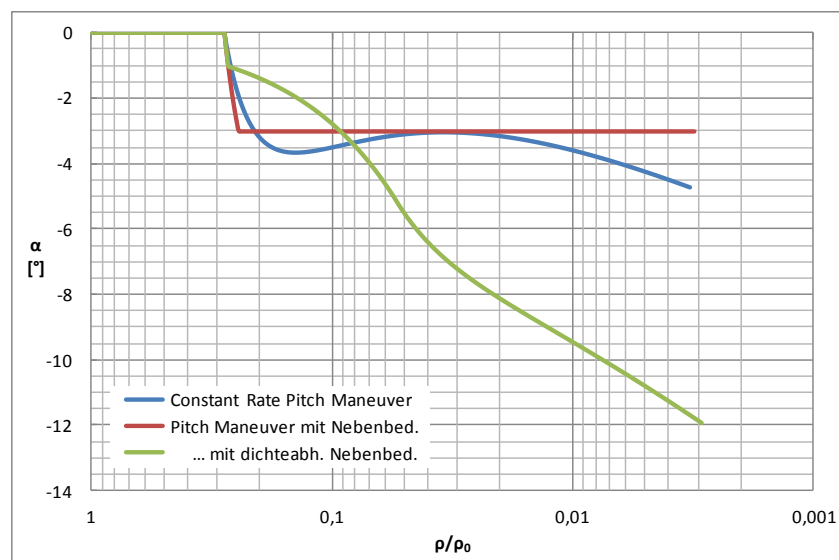
$$\alpha_{min}(h) = \alpha_{min}(h_1) e^{\frac{h-h_1}{h_s}}$$

In unserem Beispiel wählen wir  $\alpha_{min}(h_1) = -1^\circ$ . Die nachfolgende Tabelle zeigt die Ergebnisse im Vergleich.

Steuerung	Parameter	$h_B$	$\varphi_B$	$\alpha_B$	$d_E$
Gravity Turn	$\varphi_0 = 89,75^\circ$	44,1 km	51,1°	0°	132,02 km
Constant Rate Pitch Maneuver	$h_1 = 10 \text{ km}, \dot{\vartheta} = -0,64^\circ/\text{s}$	44,7 km	47,9°	-4,6°	138,39 km
Pitch Maneuver mit Nebenbedingung	$h_1 = 10 \text{ km}, \dot{\vartheta} = -1^\circ/\text{s}, \alpha_{min} = -3^\circ$	45,0 km	49,7°	-3,0°	137,81 km
Pitch Maneuver mit dichteabhängiger Nebenbedingung	$h_1 = 10 \text{ km}, \dot{\vartheta} = -1^\circ/\text{s}, \alpha_{min}(h_1) = -1^\circ$	45,5 km	46,9°	-11,9°	140,43 km

Legende:  $h_B$  Höhe,  $\varphi_B$  Bahnwinkel und  $\alpha_B$  Anstellwinkel, jeweils bei Brennschluss,  $d_E$  Reichweite

Man sieht, dass mit Hilfe der dichteabhängigen Nebenbedingung die aerodynamischen Belastungen deutlich geringer gehalten werden können als bei den beiden anderen Umlenkverfahren und dabei sogar eine etwas höhere Reichweite erzielt wird. Die nachfolgende Abbildung verdeutlicht die Unterschiede.



**Abb. 12:** Anstellwinkel  $\alpha$  in Abhängigkeit von der Luftdichte

Dort, wo die blaue und rote Kurve unterhalb der grünen Kurve liegen, ist die aerodynamische Belastung aufgrund des (betragsmäßig) größeren Anstellwinkels höher.

## Aerodynamik

Die größte Ungenauigkeit des bis hier verwendeten Modells liegt in der Aerodynamik. Zu berücksichtigen ist noch die Abhängigkeit vom Anstellwinkel  $\alpha$ . Mit dem Widerstandsbeiwert  $c_W$  und dem Auftriebsbeiwert  $c_A$  gilt bei kleinen Anstellwinkeln für den Luftwiderstand

$$F_W = (c_W + c_A \alpha^2) A \frac{1}{2} \rho v^2$$

und für den Auftrieb

$$F_A = c_A \alpha A \frac{1}{2} \rho v^2$$

Der Auftrieb wirkt senkrecht zur Bewegungsrichtung. Damit ergibt sich für die Beschleunigung

$$a_x = a_S \cos \vartheta - a_W \cos \varphi - a_A \sin \varphi$$

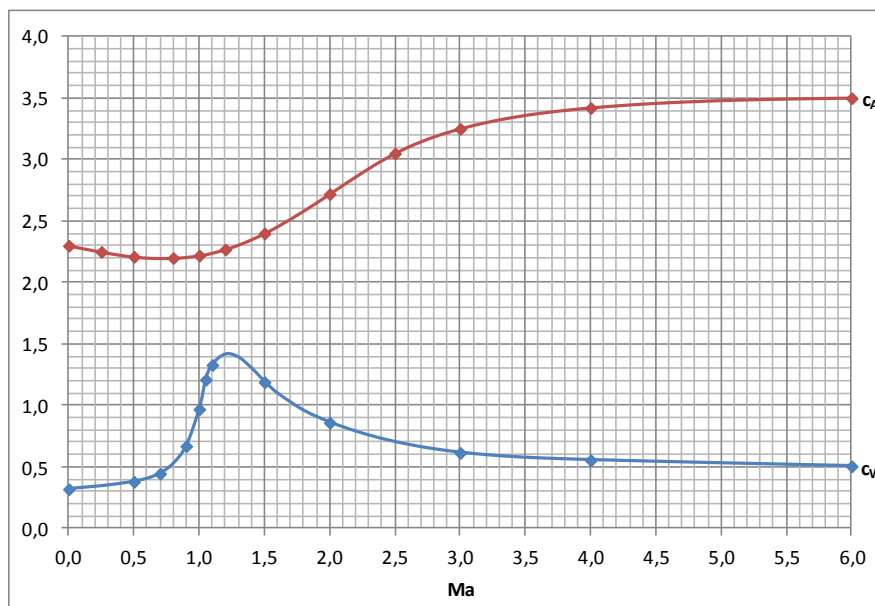
und

$$a_y = a_S \sin \vartheta - a_W \sin \varphi + a_A \cos \varphi - g$$

Ist der Anstellwinkel negativ, wirkt die Kraft in die entgegengesetzte Richtung; es liegt ein Abtrieb vor.

$c_W$  und  $c_A$  hängen nur von der **Mach-Zahl**  $Ma = v/v_S$  ab. Die Schallgeschwindigkeit  $v_S$  wiederum hängt von der Temperatur ab, die mit der Höhe variiert. Dieser Effekt ist aber gering und wird deshalb hier vernachlässigt. Wir rechnen mit einer mittleren Schallgeschwindigkeit von 320 m/s.

Der **Widerstandsbeiwert**  $c_W$  hat bei  $Ma \approx 1,2$  ein ausgeprägtes Maximum. Ein typischer Verlauf ist in der nachfolgenden Abbildung zu sehen.



**Abb. 13:** Aerodynamische Beiwerte der Ariane 4 Trägerrakete

Die Werte zwischen den Stützstellen werden mittels Spline-Interpolation ermittelt.

Nun ist auch der Anstellwinkel nach Brennschluss von Bedeutung. Es wird ein ab Brennschluss gleichbleibender Lagewinkel  $\vartheta$  angesetzt, bis  $\vartheta = \varphi$  ist und damit  $\alpha = 0$  wird, was dann für den Rest der Bahn beibehalten wird.

## Schub

Bei dieser Genauigkeit der Modellierung ist auch die Abhängigkeit des Schubes  $F_S$  vom Luftdruck  $p$  zu berücksichtigen:

$$F_S = F_{S,0} + (F_{S,vac} - F_{S,0}) \left(1 - \frac{p}{p_0}\right)$$

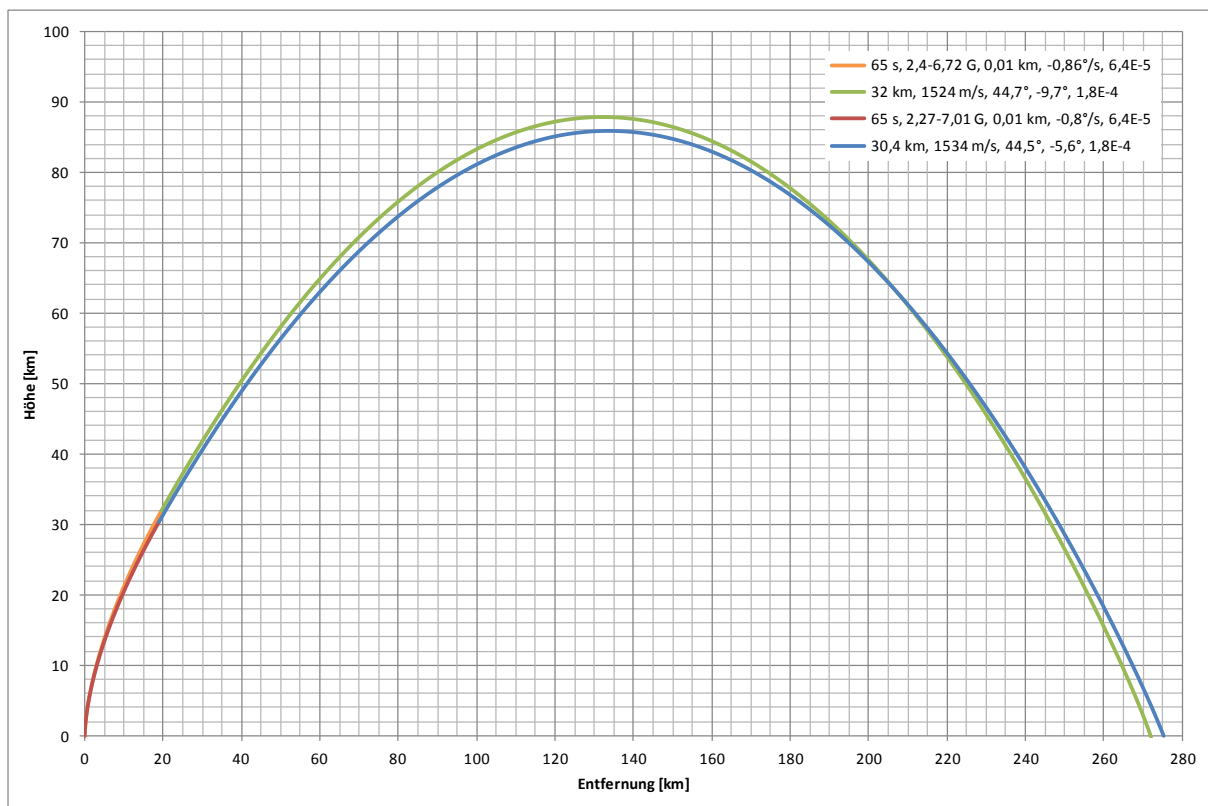
Hierbei ist  $F_{S,0}$  der Schub auf Meereshöhe und  $F_{S,vac}$  der Vakuumschub. Mit der barometrischen Höhenformel ergibt sich

$$F_S(h) = F_{S,0} + (F_{S,vac} - F_{S,0}) \left(1 - e^{-\frac{h}{h_S}}\right)$$

mit der [Skalenhöhe](#)  $h_S$ .

### Beispiel R-17

In Ermangelung realer Daten benutzen wir für die R-17 die aerodynamischen Beiwerte aus Abb. 13. Die nachfolgende Abbildung zeigt den Vergleich zwischen der Flugbahn mit konstanter Schubkraft von 137,92 kN sowie konstantem  $c_W = 0,7813$  und  $c_A = 0$  (orange und grün, siehe [Praxisbeispiel zur Schubvektorsteuerung](#)) und der mit dem verbesserten Modell berechneten Flugbahn (rot und blau).



**Abb. 14:** Vergleich einfaches mit verbessertem Modell

Auch die neue Flugbahn ist auf maximale Reichweite optimiert. Die maximale Reichweite von 275,3 km wird bei einer Umlenkrate von  $-0,8^\circ/\text{s}$  erreicht.

Die Schubbeschleunigung beträgt beim Start 2,27 G und steigt bis zum Brennschluss aufgrund des verbrauchten Treibstoffs, der 64,3 % der Startmasse ausmacht, und des niedrigeren Luftdrucks auf 7,01 G.

Ansonsten sind die Unterschiede zwischen dem einfachen und dem verbesserten Modell gering:

	<i>Einfaches</i>	<i>Verbessertes Modell</i>
Bei Brennschluss:		
Höhe	32,0 km	30,4 km
Geschwindigkeit	1524 m/s	1534 m/s
Bahnwinkel	44,7°	44,5°
Anstellwinkel	-9,7°	-5,6°
Im Scheitelpunkt:		
Höhe	87,9 km	86,0 km
Geschwindigkeit	1054 m/s	1077 m/s
Beim Aufschlag:		
Entfernung	272,0 km	275,3 km
Geschwindigkeit	488 m/s	562 m/s
Gesamtflugzeit	316 s	311 s

Auffällig ist, dass der Anstellwinkel beim verbesserten Modell (betragsmäßig) deutlich geringer ist. Die Erklärung hierfür ist die (betragsmäßig) kleinere Umlenkrate, die aber zu einem praktisch identischen Bahnwinkel bei Brennschluss führt, da ein Teil des Umlenkens durch die Abtriebskraft erfolgt.

Die Schallgeschwindigkeit  $Ma = 1$  wird bereits nach 21,8 s in einer Höhe von 3,28 km erreicht. Dort beträgt die Luftdichte noch ca. 66 % der Dichte auf Meereshöhe und der Anstellwinkel ist hier  $-2,44^\circ$ . Der maximale  $c_W$ -Wert von 1,41 wird ca. 5 s später bei  $Ma \approx 1,2$  in einer Höhe von ca. 5 km erreicht. Dort beträgt die Luftdichte noch ca. 53 % der Dichte auf Meereshöhe und der Anstellwinkel ist hier  $-2,66^\circ$ . Dies zeigt, dass die aerodynamischen Effekte eine wichtige Rolle spielen.

Die Höchstgeschwindigkeit mit  $Ma = 4,79$  und der (betragsmäßig) größte Anstellwinkel von  $-5,6^\circ$  werden bei Brennschluss in einer Höhe von 30,4 km erreicht. Dort beträgt die Luftdichte nur noch ca. 2 % der Dichte auf Meereshöhe. Im weiteren Verlauf nimmt die Geschwindigkeit bis zum Aufschlag auf  $Ma = 1,76$  ab.

Grundsätzlich bestätigt das verbesserte Modell für Aerodynamik und Schub aber auch die Aussagekraft der einfacheren Modelle, denn die Unterschiede zwischen den Flugbahnen sind doch erstaunlich gering.

## Anhang

Die Berechnungen und deren grafische Aufbereitungen wurden in Microsoft Excel unter Einsatz von Excel Makros durchgeführt. Als Beispiel ist hier die Berechnung für eine konstante Schubbeschleunigung und *Gravity Turn* dargestellt (vgl. Abb. 10).

### Excel-Tabelle für Ein- und Ausgabe

Die Ein- und Ausgabe erfolgt in der nachfolgend abgebildeten Excel-Tabelle. Die Eingabefelder sind eingerahmt.

$\Delta t_1$ [s]	$\varphi_0$ [°]	$a_0$ [G]	$t_B$ [s]	$M_T$ [%]	$k_W$	$\Delta t_2$ [s]	$v_B$ [m/s]	$h_m$ [km]	$d_e$ [km]
0,27124	89,75	4	124,77	50	0,001	0,8	1052,28	74,7388	132,017
t [s]	x [km]	y [km]	$v_x$ [m/s]	$v_y$ [m/s]	t [s]	x [km]	y [km]	$v_x$ [m/s]	$v_y$ [m/s]
0	0	0	0,02321	3,98987	124,77	18,331	44,1391	658,234	813,108
0,27124	6,3E-06	0,00108	0,08509	11,9652	125,57	18,8576	44,7896	654,7	800,897
0,54248	2,9E-05	0,00433	0,16047	19,9059	126,37	19,3813	45,4303	651,499	789,135
0,81372	7,3E-05	0,00973	0,24537	27,7775	127,17	19,9025	46,0616	648,592	777,769
1,08496	0,00014	0,01726	0,33749	35,5468	127,97	20,4214	46,6838	645,948	766,753
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

$\Delta t_1$  wird mittels einer Formel berechnet, alle anderen Ausgabewerte mit Hilfe des nachfolgend aufgelisteten Makros.

Die Spalten **x** und **y** werden für die grafische Darstellung der Flugbahnen in den Abbildungen herangezogen.

### Visual Basic Programmcode

Die Makro-Programmierung erfolgt in Visual Basic. Kommentare sind grün dargestellt. Auch als Kommentare enthalten ist der alternative Code für konstante Schubkraft und damit variable Schubbeschleunigung.

Der Datenaustausch zwischen Tabelle und Makro erfolgt über `Cells(Zeile,Spalte).Value`.

```
Sub Ballistik5()
```

```
Dim t As Double, dt As Double, tB As Double
Dim x As Double, x0 As Double, y As Double, y0 As Double, hS As Double
Dim v As Double, vx As Double, vy As Double
Dim a As Double, a0 As Double, av As Double, g As Double
Dim phi As Double, kW As Double, fT As Double, fM As Double, tau As Double
Dim S As Integer, S0 As Integer
Dim Z As Integer, Z0 As Integer, ZL As Integer, ZP As Integer

ZP = 35      ' Parameterzeile
Z0 = 38      ' Erste Datenzeile
ZL = 500     ' Letzte Datenzeile
```

```

S0 = 1      ' Erste Spalte

g = 9.80665 ' Erdbeschleunigung
hS = 7800   ' Skalenhöhe der Erdatmosphäre in m

```

Start:

```

t = 0
x = 0
y = 0

dt = Cells(ZP, S0).Value      ' Zeitschritt: N * dt = tB
phi = Cells(ZP, S0 + 1).Value * 1.74532925199433E-02
a0 = Cells(ZP, S0 + 2).Value * g ' Anfängliche Schubbeschleunigung
tB = Cells(ZP, S0 + 3).Value   ' Brennschluss
fT = Cells(ZP, S0 + 4).Value / 100 ' Massenanteil Treibstoff
kW = Cells(ZP, S0 + 5).Value   ' Luftwiderstandsfaktor auf Meereshöhe

tau = -tB / Log(1 - fT)       ' Parameter für die Schubreduzierung

a = a0                        ' Schubbeschleunigung

vx = a * Cos(phi) * dt / 2   ' Leapfrog-Verfahren
vy = (a * Sin(phi) - g) * dt / 2

y0 = 0                        ' Scheitelhöhe

Z = Z0
S = S0

Cells(Z, S).Value = t
Cells(Z, S + 1).Value = x / 1000 ' in km
Cells(Z, S + 2).Value = y / 1000
Cells(Z, S + 3).Value = vx
Cells(Z, S + 4).Value = vy

```

Step:

```

t = t + dt
x = x + vx * dt
y = y + vy * dt

If t < tB + dt / 100 Then
'   fM = 1 - fT * t / tB ' Masseabnahme durch Treibstoffverbrauch
'   a = a0 / fM          ' entsprechend erhöhte Schubbeschleunigung
'   fM = Exp(-t / tau)  ' Masseabnahme durch Treibstoffverbrauch
'   a = a0              ' bei konstanter Schubbeschleunigung
Else
  fM = 1 - fT
  a = 0
End If

av = a - kW * Exp(-y / hS) / fM * (vx * vx + vy * vy)
phi = Application.WorksheetFunction.Atan2(vx, vy)
vx = vx + av * Cos(phi) * dt
vy = vy + (av * Sin(phi) - g) * dt

Z = Z + 1

Cells(Z, S).Value = t
Cells(Z, S + 1).Value = x / 1000 ' in km

```



```

Cells(Z, S + 2).Value = y / 1000
Cells(Z, S + 3).Value = vx
Cells(Z, S + 4).Value = vy

If Abs(t - tB) < dt / 100 Then          ' Brennschluss
    vx = vx - av * Cos(phi) * dt / 2    ' Halben Zeitschritt zurück
    vy = vy - (av * Sin(phi) - g) * dt / 2
    v = Sqr(vx * vx + vy * vy)
    phi = Application.WorksheetFunction.Atan2(vx, vy)
    Cells(ZP, S0 + 7).Value = v         ' Geschwindigkeit bei Brennschluss

With ActiveSheet
    If Z < ZL Then .Range("A" & Z + 1 & ":E" & ZL).ClearContents
'
'   ' Legende Schubphase für variable Schubbeschleunigung:
'
'   .ChartObjects(1).Chart.SeriesCollection(1).Name _
'
'       = " " & Cells(ZP, S0 + 1).Value & "°, " _
'
'           & Cells(ZP, S0 + 2).Value & "-" _
'
'               & CInt(100 * a / g) / 100 & " G, " _
'
'                   & tB & " s, " & kW
'
'   ' Legende Schubphase:
'   .ChartObjects(1).Chart.SeriesCollection(1).Name _
'
'       = " " & Cells(ZP, S0 + 1).Value & "°, " _
'
'           & Cells(ZP, S0 + 2).Value & " G, " _
'
'               & tB & " s, " & kW
'
'   ' Legende Freiflugphase:
'   .ChartObjects(1).Chart.SeriesCollection(2).Name _
'
'       = " " & CInt(y / 100) / 10 & " km, " _
'
'           & CInt(v) & " m/s, " _
'
'               & CInt(10 * phi * 57.2957795130823) / 10 & "°"
End With

av = -kW * Exp(-y / hS) / fM * (vx * vx + vy * vy)

dt = Cells(ZP, S0 + 6).Value          ' Zeitschritt Freiflug

vx = vx + av * Cos(phi) * dt / 2      ' Halben Zeitschritt voraus
vy = vy + (av * Sin(phi) - g) * dt / 2

S = S0 + 5
Z = Z0

Cells(Z, S).Value = t
Cells(Z, S + 1).Value = x / 1000      ' in km
Cells(Z, S + 2).Value = y / 1000
Cells(Z, S + 3).Value = vx
Cells(Z, S + 4).Value = vy
End If

If (y0 = 0 And vy <= 0) Then          ' Berechnung der Scheitelhöhe in km
    y0 = y
    Cells(ZP, S0 + 8).Value = y0 / 1000
End If

If (y > 0 And Z < ZL) Then GoTo Step

Finish:

If y <= 0 Then                          ' Berechnung der Reichweite in km
    x0 = Cells(Z - 1, S + 1).Value * 1000
    y0 = Cells(Z - 1, S + 2).Value * 1000
    Cells(ZP, S0 + 9).Value = (x - y * (x - x0) / (y - y0)) / 1000

```

```

Else
    Cells(ZP, S0 + 9).Value = ""
End If

With ActiveSheet
    If Z < ZL Then .Range("F" & Z + 1 & ":J" & ZL).ClearContents
End With

End Sub

```

### Erläuterungen:

Die Zeitschritte bis zum Brennschluss  $t_B$  werden so berechnet, dass der Brennschluss bis auf Rundungsfehler genau getroffen wird. Die Geschwindigkeiten, die beim Leapfrog-Verfahren einen halben Zeitschritt vorausberechnet werden, werden dann den halben Zeitschritt zurückgerechnet und mit den neuen Parametern wieder einen halben Zeitschritt vorausberechnet.

Mittels `ActiveSheet.Range(Range).ClearContents` werden alte Werte aus einem vorherigen Programmablauf gelöscht, sofern sie nicht bereits überschrieben wurden.

Mittels `ActiveSheet.ChartObjects(1).Chart.SeriesCollection(Nr).Name = ...` werden die Parameter der Kurven in der Legende der Grafik angegeben.

Die Scheitelhöhe  $h_m$  ergibt sich aus dem ersten Schritt, in dem  $v_y \leq 0$  wird.

Die Reichweite  $d_e$  wird durch lineare Interpolation zwischen dem letzten Schritt mit  $y > 0$  und dem ersten Schritt mit  $y \leq 0$  ermittelt, der gleichzeitig der letzte Schritt der Bahnberechnung ist. Diese Interpolation ist nur bei einem schrägen Aufschlag von Bedeutung.